Wiktor O k t a b a (Lublin)

MATEMATYCZNE MODELE DOŚWIADCZEŃ POJEDYNCZYCH, WIELOLETNICH I WIELOKROTNYCH

1. Wstęp

1.1. **Przegląd literatury i streszczenie.** Analiza wariancji jest techniką statystyki matematycznej o znaczeniu wzrastającym w zastosowaniach, szczególnie przy wykorzystywaniu elektronicznych maszyn cyfrowych. Podstawą zastosowań jest teoria ogólnej hipotezy liniowej (por. Oktaba [43]), w której ważną rolę grają macierze idempotentne (por. Aitken [1] i Craig [11]) oraz metoda konstruowania macierzy blokowych dla układów eksperymentalnych (por. Oktaba [45]). W niniejszej pracy wykorzystuje się te wyniki oraz podstawowe twierdzenie związane z rozkładami form kwadratowych (por. Rao [52],Graybill i Marsaglia [20]). Podano teoretyczne uzasadnienie testów istotności opartych na analizie wariancji dla modeli matematycznych odpowiadających doświadczeniom pojedynczym i wielokrotnym w przypadku następujących układów eksperymentalnych: 1) kompletnej randomizacji, 2) bloków kompletnie zrandomizowanych, 3) kwadratu łacińskiego, 4) pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych (por. Cochran i Cox [10], Federer [14], Graybill [19], Oktaba [41],[42], Kempthorne [25]). Rozpatrzono modele przy założeniu, że obserwacje są niezależne i mają rozkłady normalne z jednakowymi wariancjami. Podobnie jak dla modelu stałego, dla modelu mieszanego (por.§ 3.8) wykorzystano w ANOVA tzw. operatory rzutowe, wyznaczono macierz kowariancji i udowodniono szereg podstawowych twierdzeń, które umożliwiają stosowanie dokładnych lub przybliżonych testów istotności F w zależności od postaci wartości oczekiwanych form kwadratowych.

Korzystając z notacji macierzowej udowodniono, że formy kwadratowe będące sumami kwadratów dla kolejnych źródeł zmienności analizy wariancji mają przy założeniu słuszności hipotez zerowych rozkłady chi-kwadrat z liczbami stopni swobody równymi rzędom macierzy tych form kwadratowych.

Należy zauważyć, że dla znalezienia rozkładu form kwadratowych używano niekiedy metody wyznaczania rzędów macierzy tych form i stosowano twierdzenie Cochrana (por. Kempthorne [25]). Może korzystniejszą jest metoda oparta na twierdzeniach o rozkładzie form kwadratowych, których macierze są macierzami idempotentymi (por. np. twierdzenie 1.5.1). Prowadzi ona do testu F zależnego od tych form (por. Graybill i Marsaglia [20]).

W paragrafie ostatnim, 3.9, podano krótki przegląd czterech prac traktujących doświadczenia wielokrotne metodą analizy wielu zmiennych.

1.2. Notacja. Oto znaczenia niektórych symboli użytych w tekście. Macierze będziemy oznaczali dużymi literami: $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{X}$, $\underline{\Sigma}$ ...

a wektory kolumnowe małymi literami łacińskimi lub greckimi: $\underline{y}$, $\underline{z}$, $\underline{e}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\mu}$,... . Macierzy $\underline{A}$ o n wierszach i p kolumnach przypisujemy znak $\underline{A}_{np}$. Macierz jedynkową tj. macierz, której elementami są same jedynki oznaczamy przez $\underline{E}_{np}$ a wektor jedynkowy o n współrzędnych, z których każda jest jedynką przez $\underline{E}_n$, natomiast macierz jedynkową o wymiarze n×n oznaczamy krótko przez $\underline{E}$. Znak $\underline{I}_n$ określa macierz jednostkową o wymiarze n×n. Rząd macierzy $\underline{A}$ przedstawia symbol $r(\underline{A})$. Niech $\underline{A}'$ i $\underline{y}'$ oznaczają macierz przestawioną macierzy $\underline{A}$ i wektor wierszowy odpowiadający wektorowi kolumnowemu $\underline{y}$.

Znak $\underline{\mu}$ rezerwujemy dla średniej populacji a $\underline{\Sigma}$ dla macierzy kowariancji wektora $\underline{y}$.

Wprowadzamy również następujący symbol

$$\text{(1.2.1)} \quad \mathrm{diag}(\underline{A}_1,\underline{A}_2,\ldots,\underline{A}_c) = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{0} \ldots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_2 \ldots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \ldots & \underline{A}_c \end{bmatrix},$$

gdzie $\underline{A}_1,\underline{A}_2,\ldots,\underline{A}_c$ są macierzami.

1.3. Definicje. Przedstawiamy niektóre podstawowe pojęcia z algebry, rachunku macierzowego i statystyki matematycznej (por. Searle [63]).

Definicja 1.3.1. Wyrażenie postaci $\underline{y}'\underline{A}\underline{y}$, gdzie $\underline{y}'_{1n}=[y_1,y_2,\ldots,y_n]$ jest wektorem wierszowym, natomiast $\underline{A}=[a_{ij}]$; i, j=1,2,...,n, macierzą symetryczną, nazywamy formą kwadratową n zmiennych $y_1,y_2,\ldots,y_n$ i definiujemy jako

$$\text{(1.3.1)} \quad \underline{y}'\underline{A}\underline{y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j .$$

Forma kwadratowa jest wielomianem drugiego stopnia względem $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Definicja 1.3.2. Formę kwadratową $\underline{y}'\underline{A}\underline{y}$ nazywamy dodatnio określoną, jeśli $\underline{y}'\underline{A}\underline{y} > 0$ dla każdego $\underline{y} \neq \underline{0}$. Wtedy macierz $\underline{A}$ nazywamy dodatnio określoną.

Definicja 1.3.3. Formę kwadratową $\underline{y}'\underline{A}\underline{y}$ nazywamy dodatnio półokreśloną, gdy $\underline{y}'\underline{A}\underline{y} \geqslant 0$ dla każdego $\underline{y} \neq \underline{0}$, przy czym $\underline{y}'\underline{A}\underline{y}=0$ dla co najmniej jednego $\underline{y} \neq \underline{0}$. Wtedy macierz A nazywamy dodatnio półokreśloną.

Definicja 1.3.4. Macierzami nieujemnie określonymi nazywamy macierze, które są dodatnio określone lub dodatnio półokreślone.

Przykład 1.3.1. Jeżeli $\underline{y}$ oznacza wektor n obserwacji, to suma kwadratów

$$(1.3.1) \qquad \underline{y}'\underline{y} = \underline{y}'\underline{I}\underline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum y^2$$

jest formą kwadratową dodatnio określoną, a suma kwadratów odchyleń

$$(1.3.2) \qquad nS^2 = \sum(y-\bar{y})^2 = \underline{y}'\underline{y} - \frac{(\sum y)^2}{n} = \underline{y}'(\underline{I} - \frac{1}{n}\underline{E})\underline{y}$$

jest formą kwadratową dodatnio półokreśloną. Forma ta jest zerem dla $\underline{y} = k\underline{E}_n$, gdzie k jest dowolną stałą.

Definicja 1.3.5. Macierz $\underline{A}$ nazywamy ortonormalną, gdy $\underline{A}'\underline{A} = \underline{A}\,\underline{A}' = \underline{I}$.

Definicja 1.3.6. Wartościami własnymi lub pierwiastkami charakterystycznymi macierzy $\underset{nn}{\underline{A}}$ nazywamy pierwiastki $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ równania

$$|\underline{A} - \lambda\underline{I}| = 0,$$

gdzie $|\underline{A} - \lambda\underline{I}|$ określa wyznacznik macierzy $\underline{A} - \lambda\underline{I}$.

Definicja 1.3.7. Wektorem własnym macierzy $\underline{A}$ nazywamy taki niezerowy wektor $\underline{x}$, że

(1.3.3) $\underline{A}\underline{x} = \lambda\underline{x}$ lub $(\underline{A} - \lambda\underline{I})\underline{x} = \underline{0}$,

gdzie λ jest wartością własną macierzy $\underline{A}$.

Definicja 1.3.8. Kowariancją między zmiennymi losowymi y_i oraz y_j o średnich $\mathcal{E}(y_i) = \mu_i$ oraz $\mathcal{E}(y_j) = \mu_j$ nazywamy

(1.3.4) $\mathrm{Cov}(y_i, y_j) = \sigma_{ij} = \mathcal{E}(y_i - \mu_i)(y_j - \mu_j)$ $(i,j=1,\ldots,n)$

Gdy $i = j$, to kowariancja nosi nazwę wariancji i jest postaci

(1.3.5) $\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = \mathcal{E}(y_i - \mu_i)^2$ $(i=1,\ldots,n)$

Definicja 1.3.9. Macierzą kowariancji wektora losowego $\underline{y}' = [y_1, \ldots, y_n]$ nazywamy macierz symetryczną $\not\Sigma_{\underline{y}}$ postaci

(1.3.6) $$\not\Sigma_{\underline{y}} = \mathcal{E}(\underline{y}-\underline{\mu})(\underline{y}-\underline{\mu})' = \mathcal{E}\underline{y}\underline{y}' - \underline{\mu}\underline{\mu}' = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

gdzie

(1.3.7) $\underline{\mu}' = \mathcal{E}(\underline{y}') = [\mu_1, \ldots, \mu_n] = [\mathcal{E}y_1, \ldots, \mathcal{E}y_n]$

Definicja 1.3.10. Sumę diagonalnych elementów macierzy $\underset{nn}{\underline{A}}$ nazywamy śladem macierzy i oznaczamy przez

(1.3.8) $$\mathrm{tr}(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Definicja 1.3.11. Iloczynem kroneckerowskim macierzy

$\underset{mn}{\underline{A}} = \underline{A} = [a_{ij}]$ oraz $\underset{pq}{\underline{B}} = \underline{B} = [b_{kr}]$ nazywamy macierz

$$(1.3.9) \qquad \underline{C} = \underline{A} \otimes \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\underline{B}, & a_{12}\underline{B}, \ldots, a_{1n}\underline{B} \\ a_{21}\underline{B}, & a_{22}\underline{B}, \ldots, a_{2n}\underline{B} \\ a_{m1}\underline{B}, & a_{m2}\underline{B}, \ldots, a_{mn}\underline{B} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\underline{B}\right]$$

przy czym $\underline{C} = \left[a_{ij}\underline{B}\right]$ $(i=1,2,\ldots,m; \quad j=1,2,\ldots,n)$ jest macierzą o wymiarach $mp \times nq$.

Macierz $\underline{A}$ nazywamy idempotentną gdy $\underline{A}^2 = \underline{A}$. Dla danej macierzy $\underline{X}$ przez operator rzutowy rozumiemy macierz

$$(1.3.10) \qquad \underline{P} = \underline{X}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'$$

Gdy macierz $\underline{X}'\underline{X}$ jest osobliwa, to na miejsce macierzy odwrotnej $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ wstawiamy tzw. uogólnioną macierz odwrotną $(\underline{X}'\underline{X})^{-}$. Przez uogólnioną macierz odwrotną macierzy $\underline{A}$ rozumiemy macierz $\underline{A}^{-}$, która spełnia warunek $\underline{A}\underline{A}^{-}\underline{A} = \underline{A}$. Zauważmy, że macierz $\underline{P}$ jest idempotentną. Istotnie, wobec $\underline{X}'\underline{X}(\underline{X}'\underline{X})^{-1} = \underline{I}$ mamy

$$(1.3.11) \qquad \underline{P}^2 = \underline{P}\underline{P} = \underline{X}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{X}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}' = \underline{X}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}' = \underline{P}.$$

O ważnym znaczeniu macierzy idempotentnych w teorii ogólnej liniowej hipotezy wiadomo było od 1943 roku (por. Craig [11] i Aitken [1]). W pracy Graybilla i Marsaglii [20] przedstawiono i udowodniono szereg twierdzeń o macierzach idempotentnych i podkreślono zalety z ich wykorzystania w teorii hipotezy liniowej. W niniejszej pracy wykorzystujemy te rezultaty i wiele innych dla przedstawienia teorii hipotezy liniowej w odniesieniu do podstawowych układów eksperymentalnych pojedynczych i wielokrotnych.

1.4. Twierdzenia podstawowe

Twierdzenie 1.4.1. Dla dowolnej nieosobliwej macierzy $\underline{P}$ macierz $\underline{P}'\underline{A}\underline{P}$ jest dodatnio (pół-) określona, gdy macierz $\underline{A}$ jest dodatnio (pół-)określona (por. Searle [62]).

Twierdzenie 1.4.2. Wszystkie pierwiastki charakterystyczne dodatnio (pół-)określonej macierzy są dodatnie (nieujemne).

Wniosek. Macierze dodatnio półokreślone są osobliwe. Mają one jeden lub więcej pierwiastków charakterystycznych równych zeru, a więc ich wyznacznik jest zerem. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, gdyż macierze osobliwe nie są na ogół dodatnio półokreślone.

Twierdzenie 1.4.3. Suma dodatnio (pół-)określonych macierzy jest dodatnio (pół-)określona.

Twierdzenie 1.4.4. Macierz symetryczna mająca pierwiastki charakterystyczne równe 1 i 0 jest idempotentna.

Twierdzenie 1.4.5. Jeśli $\underline{A}$ i $\underline{\Sigma}$ są macierzami symetrycznymi i $\underline{\Sigma}$ jest dodatnio określona i ponadto macierz $\underline{A}\,\underline{\Sigma}$ ma pierwiastki charakterystyczne 0 i 1, to macierz $\underline{A}\,\underline{\Sigma}$ jest idempotentna.

Twierdzenie 1.4.6. Gdy wektor losowy $\underline{y}$ jest sumą wektorów losowych postaci

$$\underline{y} = \underline{X}_1\underline{\alpha}_1 + \underline{X}_2\underline{\alpha}_2 + \ldots + \underline{X}_k\underline{\alpha}_k , \tag{1.4.3}$$

gdzie $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_k$ są macierzami, a $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \ldots, \underline{\alpha}_k$ nieskorelowanymi wektorami losowymi z r współrzędnymi tj. wektorami, dla których zerowymi są następujące macierze kowariancji

$$\underline{\Sigma}_{\alpha_i,\alpha_j} = \mathrm{Cov}(a_\tau^{(i)}, b_\tau^{(j)}) = 0, \quad \underline{\alpha}_i' = \left[a_1^{(i)}, \ldots, a_r^{(i)}\right],$$

$$\underline{\alpha}_j' = \left[b_1^{(j)}, \ldots, b_r^{(j)}\right]$$

$$(i \neq j;\ i,j = 1,2,\ldots,k;\ \tau = 1,2,\ldots,r)$$

to macierzą kowariancji wektora $\underline{y}$ jest

(1.4.4) $$\underline{\Sigma}_{\underline{y}} = \underline{X}_1\underline{\Sigma}_1\underline{X}_1' + \ldots + \underline{X}_k\underline{\Sigma}_k\underline{X}_k' = \sum_{i=1}^{k}\underline{X}_i\underline{\Sigma}_i\underline{X}_i',$$

gdzie $\underline{\Sigma}_1,\ldots,\underline{\Sigma}_k$ są macierzami kowariancji odpowiednio wektorów $\underline{\alpha}_1,\ldots,\underline{\alpha}_k$.

Uwaga 1.4.1. Twierdzenie 1.4.6 może znaleźć zastosowanie w teorii mieszanych układów eksperymentalnych (por. 3.8).

Uwaga 1.4.2. Uogólnienie twierdzenia 1.4.6 (por. Oktaba [46] wzór (2.5.13)) na przypadek skorelowanych wektorów losowych $\underline{\alpha}_1,\ldots,\underline{\alpha}_k$ nie przedstawia trudności.

Przypominamy szereg dalszych podstawowych twierdzeń.

Twierdzenie 1.4.7. Gdy $\underline{A}^2 = \underline{A}$, to

(1.4.5) $$r(\underline{A}) = tr(\underline{A}) = \sum_i \lambda_i,$$

gdzie λ_i są pierwiastkami charakterystycznymi macierzy $\underline{A}$.

Twierdzenie 1.4.8. Cyklicznie komutatywną własność iloczynu macierzowego wyrażają relacje

(1.4.6) $$tr(\underline{ABC}) = tr(\underline{BCA}) = tr(\underline{CAB}), \quad tr(\underline{AB}) = tr(\underline{BA}).$$

Ponieważ forma kwadratowa jest skalarem, więc jest równa swemu śladowi, a zatem

(1.4.7) $$\underline{y}'\underline{A}\underline{y} = tr(\underline{y}'\underline{A}\underline{y}) = tr(\underline{A}\underline{y}\underline{y}').$$

Nadto korzystać będziemy z prostej relacji

(1.4.8) $$tr(\underline{A} \pm \underline{B}) = tr(\underline{A}) \pm tr(\underline{B}).$$

Interesujemy się również wartościami oczekiwanymi i wariancjami form kwadratowych.

Twierdzenie 1.4.9. Gdy $\mathcal{E}(\underline{y}) = \underline{\mu}$ i $\underline{\Sigma}_{\underline{y}} = \underline{\Sigma}$, to

(1.4.9) $$\mathcal{E}(\underline{y}'\underline{A}\underline{y}) = \underline{\mu}'\underline{A}\underline{\mu} + tr(\underline{A}\underline{\Sigma}).$$

Dowód: Wobec $\underline{\Sigma} = \mathcal{E}(\underline{y}\underline{y}') - \underline{\mu}\underline{\mu}'$ mamy $\mathcal{E}(\underline{y}\underline{y}') = \underline{\Sigma} + \underline{\mu}\underline{\mu}'$.

Stąd

$$\mathcal{E}(\underline{y}'\underline{A}\underline{y}) = \mathcal{E}(\mathrm{tr}(\underline{A}\underline{y}\underline{y}')) = \mathrm{tr}\left[\underline{A}\,\mathcal{E}(\underline{y}\underline{y}')\right] = \mathrm{tr}(\underline{A}\,\underline{\Sigma} + \underline{A}\underline{\mu}\underline{\mu}') = \mathrm{tr}(\underline{A}\,\underline{\Sigma}) + \underline{\mu}'\underline{A}\underline{\mu}\,.$$

Mówimy, że p-wymiarowa zmienna losowa (p-wymiarowy wektor losowy) $\underline{y} = \left[y_1, y_2, \ldots, y_p\right]'$ ma rozkład normalny, gdy jej gęstością prawdopodobieństwa jest

$$f(\underline{y}) = f(y_1, \ldots, y_p) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\underline{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\tfrac{1}{2}(\underline{y} - \underline{\mu})'\,\underline{\Sigma}^{-1}(\underline{y} - \underline{\mu})\right]$$

co notujemy również jako

$$\underline{y} \longrightarrow N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$$

gdzie $\underline{\mu} = \mathcal{E}(\underline{y}) = \left[\mathcal{E}y_1, \mathcal{E}y_2, \ldots, \mathcal{E}y_p\right]'$ jest wektorem wartości oczekiwanych p zmiennych $y_1, \ldots, y_n$ a $\underline{\Sigma}$ - ich macierzą kowariancji dodatnio określoną.

<u>Twierdzenie 1.4.10.</u> Gdy $\underline{y} - N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, to (por. Searle [62], Lancaster [29])

(1.4.10) $\quad \mathrm{Cov}(\underline{y}, \underline{y}'\underline{A}\underline{y}) = 2\,\underline{\Sigma}\,\underline{A}\underline{\mu}\,,$

(1.4.11) $\quad \mathrm{Var}(\underline{y}'\underline{A}\underline{y}) = 2\mathrm{tr}(\underline{A}\,\underline{\Sigma})^2 + 4\,\underline{\mu}'\cdot\underline{A}\cdot\underline{\Sigma}\cdot\underline{A}\cdot\underline{\mu}\,.$

Oto własności iloczynu kroneckerowskiego macierzy:

(1.4.12) $\quad (\underline{A}\otimes\underline{B})(\underline{C}\otimes\underline{D}) = \underline{A}\underline{C}\otimes\underline{B}\underline{D}$ przy odpowiednich wymiarach macierzy $\underline{A}$ i $\underline{C}$ oraz $\underline{B}$ i $\underline{D}$,

(1.4.13) $\quad (\underline{A}\otimes\underline{B})^{-1} = \underline{A}^{-1}\otimes\underline{B}^{-1}$,

(1.4.14) $\quad (\underline{A}\otimes\underline{B})' = \underline{A}'\otimes\underline{B}'$,

(1.4.15) $\quad (\underline{A} + \underline{B})\otimes(\underline{C} + \underline{D}) = (\underline{A}\otimes\underline{C}) + (\underline{A}\otimes\underline{D}) + (\underline{B}\otimes\underline{C}) + (\underline{B}\otimes\underline{D})$,

(1.4.16) $\quad \underline{A}\otimes(\underline{B}\otimes\underline{C}) = (\underline{A}\otimes\underline{B})\otimes\underline{C} = \underline{A}\otimes\underline{B}\otimes\underline{C}$ - prawo łączności, (1.4.17) $\left|\underset{m,m}{\underline{A}} \otimes \underset{p,p}{\underline{B}}\right| = |\underline{A}|^p \otimes |\underline{B}|^m$,

(1.4.18) $tr(\underline{A} \otimes \underline{B}) = (tr\ \underline{A})(tr\ \underline{B})$,

(1.4.19) $\underline{E}_m \otimes \underline{E}_n = \underline{E}_{mn}$,

(1.4.20) $\underline{I}_m \otimes \underline{I}_n = \underline{I}_{mn}$,

(1.4.21) $\underset{pp}{\underline{E}} \otimes \underset{qq}{\underline{E}} = \underset{pq,pq}{\underline{E}}$.

Uwaga. Wykażemy, że

(1.4.22) $r(\underline{P}) = tr(\underline{P}) = t$,

gdzie $\underline{X}$ ma wymiary $n \times t$ (por.(1.3.10)). Istotnie, ponieważ $\underline{P}$ jest macierzą idempotentną, więc

$$r(\underline{P}) = tr(\underline{P}) = tr\left[\underline{X}(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\,\underline{X}'\right],$$

a wobec (1.4.6) mamy dalej

$$r(\underline{P}) = tr\left[\underline{X}'\underline{X}\,(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\right] = tr(\underline{I}_t) = t$$

1.5. Rozkłady form kwadratowych i ich stochastyczna niezależność

Jeżeli zmienne losowe $y_1,\dots,y_n$ mają niezależne i normalne rozkłady ze średnimi równymi zero i wariancjami równymi 1, to zmienna losowa

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

którą oznaczamy przez χ_n^2 , ma centralny rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody.

Jeżeli zmienne losowe $y_1,\dots,y_n$ mają niezależne i normalne rozkłady ze średnimi odpowiednio równymi $\mu_1,\dots,\mu_n$ (z których co najmniej jedna jest różna od zera) i wariancjami równymi 1, to zmienna losowa

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

którą oznaczymy przez $\chi'^2(n,\lambda)$ ma niecentralny rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody i parametrem niecentralności

$$\lambda = \frac{1}{2}\sum \mu_i^2$$

W notacji macierzowej odnotowujemy tę definicję następująco: Jeżeli $\underline{y} - N(\underline{\mu},\underline{I})$, to $\underline{y}'\underline{y} — \chi'^2(n,\lambda)$, gdzie $\lambda = \frac{1}{2}\underline{\mu}'\underline{\mu}$ przy czym $\underline{\mu} = [\mu_1,\ldots,\mu_n]'$.

Twierdzenie 1.5.1. Gdy $\underline{y} — N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, to

(1.5.1) $\underline{y}'\underline{A}\underline{y} — \chi'^2[\nu,\lambda]$, gdzie $\nu = r(\underline{A})$ i $\lambda = \frac{1}{2}\underline{\mu}'\underline{A}\underline{\mu}$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{A}\,\underline{\Sigma}$ jest macierzą idempotentną.

Wniosek 1.5.1. Gdy $\underline{y} — N(\underline{0},\underline{I})$, to

(1.5.2) $\underline{y}'\underline{A}\underline{y} — \chi^2_r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = A$ i $r(A)=r$.

Wniosek 1.5.2. Gdy $\underline{y} — N(\underline{0}, \sigma^2\,\underline{I})$, to

(1.5.3) $\dfrac{\underline{y}'\underline{A}\underline{y}}{\sigma^2} — \chi^2_r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = A$

i $r(A) = r$.

Gdy dwie zmienne losowe są niezależne, to ich kowariancja jest równa zeru. Natomiast, gdy dwie zmienne mają kowariancję równą zero, to są niezależne gdy wiadomo, że mają rozkłady normalne.

Twierdzenie 1.5.2. Gdy $\underline{y} — N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, to $\underline{y}'\underline{A}\underline{y}$ i $\underline{B}\underline{y}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{B}\,\underline{\Sigma}\,\underline{A} = \underline{0}$ (iloczyn $\underline{A}\,\underline{\Sigma}\,\underline{B}$ może nie istnieć).

Twierdzenie 1.5.3. Gdy $\underline{y} — N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, to formy kwadratowe $\underline{y}'\underline{A}\underline{y}$ i $\underline{y}'\underline{B}\underline{y}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{A}\,\underline{\Sigma}\,\underline{B} = \underline{0}$

(lub $\underline{B}\,\underline{\Sigma}\,\underline{A} = \underline{0}$).

W twierdzeniu tym nic nie mówi się o rozkładach form kwadratowych, choć najczęściej w zastosowaniach rozkłady te są rozkładami chi-kwadrat.

Twierdzenie 1.5.4. Niech $\underline{y} \text{ — } N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ i niech macierz symetryczna $\underline{A}_i$ o wymiarach $n \times n$ będzie rzędu $r(\underline{A}_i) = k_i$ ($i = 1,\dots,p$). Nadto niech $\underline{A} = \sum_{i=1}^{p} \underline{A}_i$ będzie macierzą symetryczną rzędu $r(\underline{A}) = k$. Wtedy

$$\underline{y}'\underline{A}_i\underline{y} \text{ — } \chi'^2\left(k_i, \tfrac{1}{2}\underline{\mu}'\underline{A}_i\underline{\mu}\right) \tag{1.5.4}$$

i $\underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}$ są wzajemnie niezależne oraz

$$\underline{y}'\underline{A}\underline{y} \text{ — } \chi'^2\left(k, \tfrac{1}{2}\underline{\mu}'\underline{A}\,\underline{\mu}\right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

1) dowolne dwie z następujących relacji są prawdziwe:

a) $\underline{A}_i\underline{\Sigma}$ jest idempotentna dla wszystkich i ,

b) $\underline{A}_i\underline{\Sigma}\,\underline{A}_j = 0$ dla wszystkich $i < j$,

c) $\underline{A}\,\underline{\Sigma}$ jest idempotentna,

lub 2) jest prawdziwa relacja c) i d) $k = \sum_{i=1}^{p} k_i$,

lub 3) jest prawdziwa relacja c) i e) $\underline{A}_1\underline{\Sigma}, \dots, \underline{A}_{(p-1)}\underline{\Sigma}$ są idempotentne i $\underline{A}_p\underline{\Sigma}$ jest macierzą określoną nieujemnie.

Dowód tego twierdzenia przedstawiony przez Graybilla i Marsaglię [20] jest długi. Dowód podany przez Searle'a [63] jest krótszy od dowodu Banerjee [2]. Ulepszył go Loynes [30] w oparciu o następujący lemat.

Lemat Loynesa. Jeśli $\underline{B}$ jest macierzą symetryczną i idempotentną a $\underline{Q}$ - symetryczną i nieujemnie określoną i jeśli $\underline{I}-\underline{B}-\underline{Q}$ jest nieujemnie określoną, to $\underline{BQ} = \underline{QB} = \underline{0}$.

Wniosek 1.5.3. (twierdzenie Cochrana). Gdy $\underline{y} \sim N(\underline{0},\underline{I}_n)$ i $\underline{A}_i$ jest macierzą symetryczną rzędu $r(\underline{A}_i) = r_i$ $(i = 1,\ldots,p)$, gdzie $\sum_{i=1}^{p} \underline{A}_i = \underline{I}_n$, to $\underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}$ $(i = 1,2,\ldots,p)$ są niezależne i mają rozkłady $\chi^2_{r_i}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$.

2. Podstawowe układy eksperymentalne

2.1. Wstęp

W rozdziale tym rozważamy cztery następujące podstawowe układy eksperymentalne: 1) kompletnej randomizacji, 2) bloków kompletnie zrandomizowanych, 3) kwadratu łacińskiego i pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych.
Przedstawiamy dla nich kolejno: 1) opis układu i założenia, 2) dowód tożsamości występującej w analizie wariancji tj. dowód podziału formy kwadratowej na k składników, 3) twierdzenie, że sumy kwadratów SS_i $(i=1,2,\ldots,k)$ są parami niezależne, 4) twierdzenie, że przy założeniach normalności i niezależności współrzędnych wektora obserwacji $\underline{y}$ formy kwadratowe

$$\frac{SS_i}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}}{\sigma_e^2} \qquad (i = 1,2,\ldots,k) \tag{2.1.1}$$

mają rozkłady chi-kwadrat z $\nu_i = r(\underline{A}_i)$ stopniami swobody, gdzie $SS_i = \underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}$ jest sumą kwadratów i-tego źródła zmienności, a $\sigma_e^2\,\underline{I}$ - macierzą kowariancji wektora obserwacji $\underline{y}$, 5) wartości oczekiwane form kwadratowych i 6) testy istotności dla wnioskowania o istotności różnic między obiektami.

2.2. Układ kompletnej randomizacji

I. Układ kompletnej randomizacji jest prostym układem eksperymentalnym, w którym stawiamy wymaganie, aby jednostki eksperymentalne stanowiły jednorodny materiał. Problem polega na porównywaniu c różnych obiektów przydzielonych losowo n jednostkom eksperymentalnym w ten sposób, że i-ty obiekt (i=1,2,...,c) otrzymuje n_i jednostek. Wtedy

(2.2.1) $$\sum_{i=1}^{c} n_i = n.$$

Układowi temu odpowiada model matematyczny postaci (por. Oktaba [41])

(2.2.2) $$y_{ij} = \mu_i + e_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \quad (i=1,2,\dots,c; j=1,2,\dots,n_i),$$

gdzie y_{ij} oznacza j-tą obserwację i-tego obiektu, μ - średnią ogólną populacji, μ_i - średnią i-tego obiektu, $\alpha_i = \mu_i - \mu$ - efekt i-tego obiektu, e_{ij} - błąd doświadczalny związany z y_{ij}. Poza stałymi wielkościami μ, μ_i oraz α_i w modelu występują zmienne losowe: y_{ij} oraz e_{ij}. Zakładamy, że zmienne są niezależne i mają rozkłady normalne odpowiednio ze średnimi μ_i oraz 0 i z wariancją σ_e^2. Zapisujemy ten fakt krótko jako

(2.2.3) $$y_{ij} - NN(\mu_i, \sigma_e^2), \quad e_{ij} - NN(0, \sigma_e^2).$$

Symbol NN oznacza rozkład "normalny i niezależny".
Macierzowo notujemy jako

(2.2.4) $$\underline{y} - N(\underline{\mu}, \sigma_e^2 \underline{I}) \quad \text{lub} \quad \underline{e} - N(\underline{0}, \sigma_e^2 \underline{I}),$$

gdzie

(2.2.5) $$\underline{y}' = [y_{11}, y_{12}, \dots, y_{cn_c}], \quad \underline{e}' = [e_{11}, e_{12}, \dots, e_{cn_c}]$$

są odpowiednio wektorami wierszowymi n obserwacji i tyluż błędów eksperymentalnych, natomiast $\underline{\mu}$ jest wektorem o składowych $\mu_1, \dots, \mu_c$ a σ_e^2 I - macierzą kowariancji wektora $\underline{y}$ lub wektora błędów $\underline{e}$. Model postaci (2.2.2) w notacji macierzowej przybiera kształt

(2.2.6) $$\underline{y} = \underline{X}\,\underline{\beta} + \underline{e}$$

gdzie

(2.2.7) $\underline{\mu} = \underline{X}\,\underline{\beta} = \underline{E}_n\mu + \underline{X}_2\underline{\alpha}$

(2.2.8) $\underline{X} = \underset{n,c+1}{\underline{X}} = \left[\underset{n1}{\underline{X}_1} \vdots \underset{nc}{\underline{X}_2}\right], \quad \underline{X}_1 = \underline{E}_n$,

natomiast

(2.2.9) $\underline{\alpha} = \left[\alpha_1, \ldots, \alpha_c\right]'$

jest wektorem efektów obiektowych a

(2.2.10) $\underline{\beta} = \left[\mu, \underline{\alpha}'\right]'$

wektorem parametrów $\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_c$.

Mamy tu dwa następujące operatory rzutowe (por. 1.3.10)

(2.2.11) $\underline{P}_1 = \underline{X}_1(\underline{X}_1'\underline{X}_1)^{-1}\underline{X}_1' = \frac{1}{n}\underline{E}, \quad \underline{P}_c = \underline{P}_2 = \underline{X}_2(\underline{X}_2'\underline{X}_2)^{-1}\underline{X}_2'$,

gdzie

(2.2.12) $\underline{X}_2 = \mathrm{diag}\left[\underline{E}_{n_1}, \underline{E}_{n_2}, \ldots, \underline{E}_{n_c}\right]$

jest macierzą blokową układu dla obiektów w modelu.

II. Wykażemy słuszność następującej tożsamości dla klasyfikacji pojedynczej, którą reprezentują wyniki uzyskane w układzie kompletnej randomizacji:

(2.2.13) $SS_y = SS_c + SS_e$,

gdzie

(2.2.14) $SS_y = \underline{y}'\underline{A}_y\underline{y}$

(2.2.15) $SS_c = \underline{y}'\underline{A}_c\underline{y}$

(2.2.16) $SS_e = \underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}$

są odpowiednio sumami kwadratów dla wszystkich wyników, obiektów i błędu eksperymentalnego, a

(2.2.17) $\underline{A}_y = \underline{I} - \underline{P}_1, \quad \underline{A}_c = \underline{P}_c - \underline{P}_1, \quad \underline{A}_e = \underline{I} - \underline{P}_c$.

Wobec (2.2.15) i (2.2.16) dowód tożsamości (2.2.13) w postaci macierzowej jest natychmiastowy:

$$SS_c + SS_e = \underline{y}'[\underline{P}_c - \underline{P}_1 + \underline{I} - \underline{P}_c]\underline{y} = \underline{y}'[\underline{I} - \underline{P}_1]\underline{y} = SS_y.$$

Postaci sum kwadratów SS_c, SS_e i SS_y w formie niemacierzowej uwidoczniono poniżej w tablicy 2.2.1. Zauważmy, że w przypadku zrównoważonej klasyfikacji pojedynczej tj., gdy $n_i = k$ macierz $\underline{X}_2$ jest postaci

(2.2.18) $\qquad \underline{X}_2 = \underline{I}_c \otimes \underline{E}_k$

III. Twierdzenie 2.2.1. Gdy $\underline{y} \sim N(\mu, \underline{I} \cdot \sigma_e^2)$, to sumy kwadratów SS_c i SS_e są stochastycznie niezależne.

Dowód: Skorzystamy z twierdzenia o niezależności stochastycznej form kwadratowych. Dla dowodu wystarczy wykazać, że

(2.2.19) $\qquad \underline{A}_c \cdot \underline{A}_e = 0,$

gdzie $\underline{A}_c$ i $\underline{A}_e$ są zdefiniowane w (2.2.17).

Zauważmy, że wobec

(2.2.20) $\qquad \underline{X}_2 = \mathrm{diag}(\underline{E}_{n_1}, \underline{E}_{n_2}, \ldots, \underline{E}_{n_c})$

mamy

(2.2.21) $\qquad \underline{X}_2' \underline{X}_2 = \mathrm{diag}(n_1, n_2, \ldots, n_c)$

a więc

(2.2.22) $\qquad \underline{E}\, \underline{X}_2(\underline{X}_2'\underline{X}_2)^{-1} \underline{X}_2' = \underline{E}\underline{P}_c = \underline{E}\underline{P}_2 = \underline{E}$

Wtedy

(2.2.23) $\qquad \underline{P}_1\underline{P}_c = \frac{1}{n} \underline{E}\underline{X}_2(\underline{X}_2'\underline{X}_2)^{-1} \underline{X}_2' = \frac{1}{n} \underline{E} = \underline{P}_1$

Wykorzystując tę prostą relację, idempotentność macierzy $\underline{P}_c$ oraz (2.2.17), otrzymujemy kolejno

$$\underline{A}_c \cdot \underline{A}_e = (\underline{P}_c - \underline{P}_1)(\underline{I} - \underline{P}_c) = \underline{P}_c - \underline{P}_c^2 - \underline{P}_1 + \underline{P}_1\underline{P}_c = \underline{P}_1\underline{P}_c - \underline{P}_1 = 0$$

IV. Twierdzenie 2.2.2. Przy założeniu (2.2.4) formy kwadratowe

(2.2.24) $$\frac{SS_c}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_c\underline{y}}{\sigma_e^2}, \quad \frac{SS_e}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}}{\sigma_e^2} \quad \text{i} \quad \frac{SS_y}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_y\underline{y}}{\sigma_e^2}$$

mają rozkłady chi-kwadrat odpowiednio z $\nu_c = r(\underline{A}_c) = c - 1$ stopniami swobody przy założeniu prawdziwości hipotezy $\alpha_i = 0$ $(i=1,2,\ldots,c)$ oraz z $\nu_e = r(\underline{A}_e) = n - c$ i $\nu_y = r(\underline{A}_y) = n - 1$ stopniami swobody.

Dowód: Skorzystamy z twierdzenia 1.5.1. Wobec idempotentności macierzy $\underline{P}_1$ i $\underline{P}_c$ idempotentną jest macierz $\underline{A}_c$.
Rzeczywiście, z uwagi na (2.2.23) i (2.2.22) uzyskujemy

$$\underline{A}_c^2 = (\underline{P}_c - \underline{P}_1)(\underline{P}_c - \underline{P}_1) = \underline{P}_c^2 - \underline{P}_c\underline{P}_1 - \underline{P}_1\underline{P}_c + \underline{P}_1^2 =$$

$$= \underline{P}_c - \underline{P}_1 - \underline{P}_1 + \underline{P}_1 = \underline{P}_c - \underline{P}_1 = \underline{A}_c$$

Korzystając z własności, że $\underline{I}-\underline{A}$ jest idempotentną, gdy $\underline{A}$ jest idempotentną, wnioskujemy, że $\underline{A}_e = \underline{I} - \underline{P}_c$ i $\underline{A}_y = \underline{I} - \underline{P}_1$ są idempotentnymi. Wobec twierdzenia 1.4.7 i własności 1.4.6 i 1.4.8 otrzymujemy kolejno

(2.2.25) $$r(\underline{A}_c) = tr(\underline{P}_c - \underline{P}_1) = tr(\underline{P}_c) - tr(\underline{P}_1) = c - 1.$$

Następnie

(2.2.26) $$r(\underline{A}_e) = tr(\underline{A}_e) = tr(\underline{I} - \underline{P}_c) = tr(\underline{I}) - tr(\underline{P}_c) = n - c$$

oraz

$$r(\underline{A}_y) = tr(\underline{I} - \underline{P}_1) = tr(\underline{I}) - tr(\underline{P}_1) = n - 1$$

Wobec założeń (2.2.4) i (2.2.7) przy prawdziwości hipotezy

(2.2.27) $\alpha_i = 0$ $(i=1,\ldots,c)$ lub macierzowo $\underline{\alpha} = \underline{0}$ (por. (2.2.9)) stwierdzamy, że wektor losowy

(2.2.28) $$\underline{y} \sim N(\mu\underline{E}_n, \underline{I}\sigma_e^2)$$

Zauważmy, że iloczyn macierzy idempotentnej A_c formy kwadratowej

$$(2.2.29) \qquad \frac{\underline{y}'\underline{A}_c\underline{y}}{\sigma_e^2} = \frac{SS_c}{\sigma_e^2}$$

i macierzy kowariancji $\underline{I}\cdot\sigma_e^2$ wektora $\underline{y}$ jest macierzą

$$\frac{\underline{A}_c}{\sigma_e^2}\cdot\underline{I}\;\sigma_e^2 = \underline{A}_c$$

a więc macierzą idempotentną.

Stąd na podstawie twierdzenia 1.5.1 i (2.2.25) wnioskujemy, że forma kwadratowa (2.2.29) ma rozkład chi-kwadrat z c-1 stopniami swobody.

Wykażemy, że przy hipotezie (2.2.27) parametrem niecentralności tego chi-kwadratu jest $\lambda = 0$. Istotnie, wobec (2.2.17) oraz z uwagi na relacje

$$\underline{P}_1 = \underline{P}_1', \quad \underline{P}_c = \underline{P}_c', \quad \underline{P}_1\underline{E}_n = \underline{E}_n, \quad \underline{P}_c\underline{E}_n = \underline{E}_n$$

uzyskujemy

$$(2.2.30) \qquad \lambda = \frac{1}{2}(\mu\cdot\underline{E}_n)'\frac{\underline{A}_c}{\sigma_e^2}(\mu\cdot\underline{E}_n) = \frac{\mu^2}{2\sigma_e^2}\underline{E}_n'(\underline{P}_c - \underline{P}_1)\,\underline{E}_n =$$

$$= \frac{\mu^2}{2\sigma_e^2}(\underline{E}_n'\underline{P}_c\underline{E}_n - \underline{E}_n'\underline{P}_1\underline{E}_n) = \frac{\mu^2}{2\sigma_e^2}(\underline{E}_n'\underline{E}_n - \underline{E}_n'\underline{E}_n) = 0$$

Zatem zmienna losowa (2.2.29) przy prawdziwości hipotezy zerowej (2.2.27) ma centralny rozkład chi-kwadrat z c-1 stopniami swobody.

Przejdźmy do dowodu, że zmienna losowa

$$(2.2.31) \qquad \frac{\underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}}{\sigma^2} = \frac{SS_e}{\sigma^2}$$

ma centralny rozkład chi-kwadrat z n-c stopniami swobody przy prawdziwej lub nieprawdziwej hipotezie (2.2.27).

Wobec założeń (2.2.4) zauważamy, że iloczyn macierzy idempotentnej $\underline{A}_e$ formy kwadratowej (2.2.31) i macierzy kowariancji $\underline{I}\,\sigma_e^2$ wektora $\underline{y}$ jest macierzą

$$\frac{\underline{A}_e}{\sigma_e^2}\cdot\underline{I}\cdot\sigma_e^2=\underline{A}_e$$

a więc macierzą idempotentną.

Stąd na podstawie twierdzenia 1.5.1 i (2.2.25) wnioskujemy, że forma kwadratowa (2.2.31) ma rozkład chi-kwadrat z n-c stopniami swobody. Wykażemy, że parametrem niecentralności jest $\lambda = 0$. Istotnie, wobec

(2.2.32) $$\underline{\mu}'\cdot\underline{A}_e\cdot\underline{\mu}=(\underline{X}\,\underline{\beta})'(\underline{I}-\underline{P}_c)\underline{X}\,\underline{\beta}=0$$

otrzymujemy natychmiast

$$\lambda=\frac{1}{2}\underline{\mu}'\,\frac{\underline{A}_e}{\sigma_e^2}\underline{\mu}=0\,.$$

Ponieważ przy hipotezie zerowej (2.2.27) obie formy kwadratowe (2.2.29) i (2.2.31) mają centralne rozkłady chi-kwadrat, więc z uwagi na tożsamość (2.2.13) zmienna losowa $\frac{SS_y}{\sigma_e^2}$ jako suma obu form ma również centralny rozkład χ^2 z liczbą stopni swobody $(c-1)+(n-c) = n-1$.

W tablicy 2.2.1 $SS_c=\sum_{i=1}^{c}(\bar{y}_{i.}-\bar{y})^2$, $SS_e=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$, $SS_y=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2$ są sumami kwadratów dla obiektów, błędu i całości wyników $\bar{y}_{i.}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}y_{ij}$ jest średnią w próbie

Tablica 2.2.1

Analiza wariancji dla klasyfikacji pojedynczej

przy restrykcji $\sum_{i=1}^{c} n_i \alpha_i = 0$

Źródło zmienności	Stopnie swobody ν	Suma kwadratów odchyleń SS	Średni kwadrat $V = \frac{SS}{\nu}$	Wartość oczekiwana średniego kwadratu $\mathcal{E}(V)$	Funkcja testowa F
1	2	3	4	5	6
1. Między obiektami, C	$\nu_c = c-1$	$SS_c = \underline{y}'(\underline{P}_c - \underline{P}_1)\underline{y}$	V_c	$\sigma_c^2 + \sigma_e^2$	$F_c = \frac{V_c}{V_e}$
2. Wewnątrz obiektów	$\nu_e = n-c$	$SS_e = \underline{y}'(\underline{I} - \underline{P}_c)\underline{y}$	V_e	σ_e^2	—
3. Całość	$\nu_y = n-1$	$SS_y = \underline{y}'(\underline{I} - \underline{P}_1)\underline{y}$	—	—	—

i-tego obiektu (i=1,2,...,c), $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ - średnią wszystkich obserwacji w próbie

i $\sigma_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{c} n_i \alpha_i^2}{c-1}$ przy restrykcji $\sum_{i=1}^{c} n_i \alpha_i = 0$.

V. Wartości oczekiwane średnich kwadratów dla obiektów V_c i dla błędu V_e uzyskane ze wzoru (1.4.9) zestawiono w tablicy analizy wariancji 2.2.1. Wyznaczamy je, korzystając z (2.2.14) i z (1.4.22):

$$\mathcal{E}(SS_c) = \mathcal{E}[\underline{y}'\underline{A}_c\underline{y}] = \mathcal{E}[\underline{y}'(\underline{P}_c - \underline{P}_1)\underline{y}] = tr[(\underline{P}_c-\underline{P}_1)\underline{I}\,\sigma_e^2] + \underline{\mu}'(\underline{P}_c-\underline{P}_1)\underline{\mu} =$$

$$= \sigma_e^2\, tr(\underline{P}_c-\underline{P}_1) + \underline{\mu}'(\underline{P}_c-\underline{P}_1)\underline{\mu} = \sigma_e^2(c-1) + \underline{\mu}'(\underline{P}_c-\underline{P}_1)\underline{\mu},$$

bo $tr\,\underline{P}_c = c$ i $tr\,\underline{P}_1 = 1$.

Wykażemy, że

$$\underline{\mu}'\underline{A}_c\underline{\mu} = \sum_{i=1}^{c} n_i \alpha_i^2 \tag{2.2.31}$$

Dla dowodu relacji (2.2.31) skorzystamy ze związków:

$\underline{P}_c\underline{E}_n = \underline{E}_n$ (por. (2.2.22)), $\underline{P}_c\underline{X}_2 = \underline{X}_2$, $\underline{P}_c = \underline{P}_c'$, $\underline{P}_1\underline{E}_n = \underline{E}_n$

$\underline{P}_1 = \underline{P}_1' = \frac{1}{n}\underline{E}$,

$$\underline{\mu} = [\underline{E}_n \,\vdots\, \underline{X}_2]\begin{bmatrix}\mu \\ \underline{\alpha}\end{bmatrix}$$

Nadto zauważmy, że restrykcję

$$\sum_{i=1}^{c} n_i \alpha_i = \sum_i n_i \alpha_i = 0 \tag{2.2.32}$$

można zapisać jako

$$\underline{\alpha}'\underline{X}_2\underline{E} = \underline{0} = \left[\sum_i n_i\alpha_i, \sum_i n_i\alpha_i, \ldots, \sum_i n_i\alpha_i\right] \tag{2.2.33}$$

Otrzymujemy kolejno:

$$\underline{\mu}'\underline{A}_c\underline{\mu} = (\mu \vdots \underline{\alpha}')\begin{bmatrix}\underline{E}_n' \\ \underline{X}_2'\end{bmatrix}(\underline{P}_c - \underline{P}_1)(\underline{E}_n \vdots \underline{X}_2)\begin{bmatrix}\mu \\ \underline{\alpha}\end{bmatrix} =$$

$$= \mu^2 \underline{E}_n'(\underline{P}_c-\underline{P}_1)\underline{E}_n + \mu\underline{\alpha}'\underline{X}_2'(\underline{P}_c-\underline{P}_1)\underline{E}_n + \mu\underline{E}_n'(\underline{P}_c-\underline{P}_1)\underline{X}_2\underline{\alpha}' +$$

$$+ \underline{\alpha}'\underline{X}_2'(\underline{P}_c-\underline{P}_1)\underline{X}_2\underline{\alpha} =$$

$$= \underline{\alpha}'\underline{X}_2'(\underline{P}_c-\underline{P}_1)\underline{X}_2\underline{\alpha} = \underline{\alpha}'\underline{X}_2'\underline{P}_2\underline{X}_2\underline{\alpha} - \underline{\alpha}'\underline{X}_2\underline{P}_1\underline{X}_2\underline{\alpha} =$$

$$= \underline{\alpha}'\underline{X}_2'\underline{X}_2\underline{\alpha} - \frac{1}{n}\underline{\alpha}'\underline{X}_2'\underline{E}\underline{X}_2\underline{\alpha} = \underline{\alpha}'\underline{X}_2'\underline{X}_2\underline{\alpha} = \sum_{i=1}^{c} n_i\alpha_i^2 .$$

Gdy $n_i=k$ $(i=1,2,\ldots,c)$, to

$$\underline{\mu}'\underline{A}_c\underline{\mu} = k\sum_{i=1}^{c}\alpha_i^2$$

Tym samym udowodniliśmy, że przy restrykcji (2.2.23) otrzymujemy

$$\mathcal{E}(SS_c) = (c-1)\sigma_e^2 + \sum_{i=1}^{c} n_i\alpha_i^2,$$

czyli (por. Tabl. 2.2.1):

$$\mathcal{E}(V_c) = \sigma_e^2 + \frac{1}{c-1}\sum_{i=1}^{c} n_i\alpha_i^2 = \sigma_e^2 + \sigma_c^2$$

Podobnie korzystając ze wzoru (1.4.9) znajdujemy wartość oczekiwaną sumy kwadratów dla błędu:

$$\mathcal{E}(SS_e) = \mathcal{E}(\underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}) = tr(\underline{A}_e\cdot\underline{I}\,\sigma_e^2) + \underline{\mu}'\underline{A}_e\underline{\mu} = \sigma_e^2\,tr(\underline{A}_e) + \underline{\mu}'\underline{A}_e\underline{\mu} =$$

$$= (n-c)\sigma_e^2 + (\underline{X}\underline{\beta})'(\underline{I}-\underline{P}_c)(\underline{X}\underline{\beta}) = (n-c)\sigma_e^2,$$

gdyż $(\underline{X}\underline{\beta})'(\underline{I}-\underline{P}_c)(\underline{X}\underline{\beta}) = \underline{0}$ z uwagi na to, że $\underline{X} = (\underline{E}_n \vdots \underline{X}_2)$, $\underline{P}_c\underline{E}_n = \underline{E}_n$, $\underline{P}_c\underline{X}_2 = \underline{X}_2$ oraz $\underline{A}_e\underline{X} = (\underline{I}-\underline{P}_c)\underline{X} = \underline{X}-\underline{P}_c\underline{X} = \underline{X}-\underline{P}_c(\underline{E}_n \vdots \underline{X}_2) =$
$= \underline{X}-(\underline{P}_c\underline{E}_n \vdots \underline{P}_c\underline{X}) = \underline{X}-(\underline{E}_n \vdots \underline{X}_2) = \underline{X}-\underline{X} = \underline{0}$

W rezultacie

$$\mathcal{E}(V_e) = \mathcal{E}\left(\frac{SS_e}{n-c}\right) = \sigma_e^2 .$$

VI. Przy hipotezie zerowej: $\alpha_i = 0$ $(i=1,2,\ldots,c)$, która głosi, że nie ma różnic między obiektami, uzyskujemy $\sigma_c^2 = 0$. Wtedy $\mathcal{E}(V_c) = \mathcal{E}(V_e) = \sigma_e^2$. Stąd i na podstawie twierdzeń 2.2.1, 2.2.2 i definicji zmiennej losowej F uzyskujemy postać funkcji testowej

$$F_c = \frac{V_c}{V_e} \quad \text{przy } c-1 \text{ i } n-c \text{ stopniach swobody}$$

(por. 6 kolumnę tablicy 2.2.1).

Odpowiednie przedziały ufności dla różnic międzyobiektowych można znaleźć u Oktaby [42].

2.3. Układ bloków kompletnie zrandomizowanych

I. W układzie bloków kompletnie zrandomizowanych obserwujemy $n = ac$ jednostek eksperymentalnych, które dzielimy na c jednorodnych równych grup, zwanych blokami, po a jednostek w grupie. Dopuszczamy zmienność między blokami. Każdej z a jednostek bloku przypisujemy losowo jeden obiekt. Losowanie takie przeprowadzamy dla każdego bloku oddzielnie. W układzie tym blok stanowi pełną replikację, gdyż obejmuje wszystkie obiekty eksperymentu i każdy z obiektów występuje w niej dokładnie jeden raz.

Z układu bloków kompletnie zrandomizowanych otrzymujemy materiał eksperymentalny podlegający podwójnej klasyfikacji krzyżowej ze względu na 1) obiekty i 2) bloki.

Układowi odpowiada model matematyczny postaci (por. Oktaba [41]):

$$(2.3.1) \qquad y_{ij} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + e_{ij} = \mu_{ij} + e_{ij} \qquad (i=1,2,\ldots,a; \; j=1,2,\ldots,c)$$

gdzie y_{ij} oznacza obserwację i-tego obiektu w j-tym bloku, μ - średnią ogólną, $\mu_{ij} = \mathcal{E}(y_{ij}) = \mu + \alpha_i + \gamma_j$ - średnią populacji i-tego obiektu w j-tym bloku, α_i - efekt i-tego obiektu, γ_j - efekt j-tego bloku, e_{ij} - błąd eksperymentalny związany z y_{ij}. Poza stałymi wielkościami $\mu, \mu_{ij}, \alpha_i, \gamma_j$ w modelu występują zmienne losowe: y_{ij} oraz e_{ij}. Zakładamy, że

(2.3.2) $\quad y_{ij} — NN(\mu_{ij}, \sigma_e^2)$ lub, że $e_{ij} — NN(0, \sigma_e^2)$

Macierzowo notujemy to jako

(2.3.3) $\quad \underline{y} — N(\underline{\mu}, \sigma_e^2 \underline{I})$ lub $\underline{e} — N(\underline{0}, \sigma_e^2 \underline{I})$

gdzie

(2.3.4) $\quad \underline{y}' = [y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{ac}], \quad \underline{e}' = [e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{ac}]$

są odpowiednio wektorami wierszowymi n obserwacji i tyluż błędów eksperymentalnych.

Model (2.3.1) w postaci macierzowej przybiera kształt

(2.3.5) $\quad \underline{y} = \underline{X}\,\underline{\beta} + \underline{e} = [\underline{E}_n \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3]\,\underline{\beta} + \underline{e}$

gdzie

(2.3.6) $\quad \underline{X} = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3] = [\underline{E}_n \vdots \underline{X}_a \vdots \underline{X}_c]$

jest macierzą określoną przez trzy następujące macierze blokowe: $\underline{X}_1$ dla średniej, $\underline{X}_a$ dla obiektów i $\underline{X}_c$ dla bloków:

(2.3.7) $\quad \underline{X}_1 = \underline{E}_n, \quad \underline{X}_2 = \underline{X}_a = \underline{I}_a \otimes \underline{E}_c, \quad \underline{X}_3 = \underline{X}_c = \underline{E}_a \otimes \underline{I}_c$

II. Wykażemy słuszność następującej tożsamości dla podwójnej klasyfikacji krzyżowej, którą reprezentują wyniki uzyskane w układzie bloków kompletnie zrandomizowanych:

(2.3.8) $$SS_y = SS_a + SS_c + SS_e$$

gdzie SS_y wyraża się wzorem (2.2.14).

(2.3.9) $$SS_a = \underline{y}'\underline{A}_a\underline{y} = \underline{y}'(\underline{P}_a - \underline{P}_1)\underline{y}$$

(2.3.10) $$SS_c = \underline{y}'\underline{A}_c\underline{y} = \underline{y}'(\underline{P}_c - \underline{P}_1)\underline{y}$$

(2.3.11) $$SS_e = \underline{y}'\underline{A}_e\underline{y} = \underline{y}'(\underline{I} - \underline{P}_a - \underline{P}_c + \underline{P}_1)\underline{y}$$

są odpowiednio sumami kwadratów (por. tablica 2.3.1) dla 1) wszystkich n wyników, 2) obiektów, 3) bloków i 4) błędu eksperymentalnego.

Symbole $\underline{P}_1 = \frac{1}{n}\underline{E}_{nn}$, $\underline{P}_2 = \underline{P}_a$ i $\underline{P}_3 = \underline{P}_c$ oznaczają t.zw. operatory rzutowe i wyrażają się wzorami

(2.3.12) $$\underline{P}_i = \underline{X}_i(\underline{X}_i'\underline{X}_i)^{-1}\underline{X}_i' \qquad (i=1,2,3)$$

przy czym macierze $\underline{A}$ form kwadratowych (2.3.9), (2.3.10) i (2.3.11) są postaci (por. Oktaba [44]):

(2.3.13) $$\underline{A}_a = \underline{P}_a - \underline{P}_1, \quad \underline{A}_c = \underline{P}_c - \underline{P}_1, \quad \underline{A}_e = \underline{I} - \underline{P}_a - \underline{P}_c + \underline{P}_1$$

Wobec (2.2.14), (2.3.9), (2.3.10) i (2.3.11) dowód tożsamości (2.3.8) w postaci macierzowej jest natychmiastowy

$$\underline{y}'\left[\underline{P}_a - \underline{P}_1 + \underline{P}_c - \underline{P}_1 + \underline{I} - \underline{P}_a - \underline{P}_c - \underline{P}_1\right]\underline{y} = SS_a + SS_c + SS_e = \underline{y}'\left[\underline{I} - \underline{P}_1\right]\underline{y} = SS_y$$

Postaci sum kwadratów: SS_a, SS_c, SS_e i SS_y w formie niemacierzowej podano poniżej w tablicy 2.3.1.

III. <u>Twierdzenie 2.3.1.</u> Gdy $\underline{y} \sim N(\underline{\mu}, \underline{I}\sigma_e^2)$, to sumy kwadratów SS_a, SS_c i SS_e są stochastycznie niezależne.

Dowód: Korzystając z twierdzenia 1.5.3 o niezależności stochastycznej form kwadratowych wystarczy wykazać trzy następujące związki:

$$\underline{A}_a\underline{A}_e = 0, \quad \underline{A}_c\underline{A}_e = 0, \quad \underline{A}_a\underline{A}_c = 0$$

Wobec (2.3.7) uzyskujemy kolejno

$$\underline{X}_2'\underline{X}_2 = (\underline{I}_a \otimes \underline{E}_c)'(\underline{I}_a \otimes \underline{E}_c) = (\underline{I}_a \otimes \underline{E}_c')(\underline{I}_a \otimes \underline{E}_c) = \underline{I}_a \otimes \underline{E}_c'\underline{E}_c =$$

$$= \underline{I}_c \otimes c = c\underline{I}_a, \quad (\underline{X}_2'\underline{X}_2)^{-1} = \frac{1}{c}\,\underline{I}_a$$

$$\underline{P}_2 = \underline{P}_a = \underline{X}_2(\underline{X}_2'\underline{X}_2)^{-1}\,\underline{X}_2' = (\underline{I}_a \otimes \underline{E}_c)\,\frac{1}{c}\,\underline{I}_a(\underline{I}_a \otimes \underline{E}_c') =$$

$$= \frac{1}{c}\,(\underline{I}_a \otimes \underline{E}_c)(\underline{I}_a \otimes \underline{E}_c') = \frac{1}{c}\,\underline{I}_a \otimes \underline{E}_c\underline{E}_c' = \frac{1}{c}\,(\underline{I}_a \otimes \underset{cc}{\underline{E}})$$

Podobnie

$$\underline{X}_3'\underline{X}_3 = a\underline{I}_c$$

$$\underline{P}_3 = \frac{1}{a}\,(\underset{aa}{\underline{E}} \otimes \underline{I}_c)$$

oraz

$$\underline{P}_1\underline{P}_2 = \frac{1}{n}\,\underline{E}\,\frac{1}{c}\,(\underline{I}_a \otimes \underset{cc}{\underline{E}}) = \frac{1}{nc}\,(\underset{aa}{\underline{E}} \otimes \underset{cc}{\underline{E}})(\underline{I}_a \otimes \underset{cc}{\underline{E}}) =$$

$$= \frac{1}{nc}\,\underset{aa}{\underline{E}} \otimes c\,\underset{cc}{\underline{E}} = \frac{1}{n}\,\underset{aa}{\underline{E}} \otimes \underset{cc}{\underline{E}} = \frac{1}{n}\,\underline{E} = \underline{P}_1$$

$$\underline{P}_1\underline{P}_3 = \frac{1}{n}\,\underline{E}\;\frac{1}{a}\,(\underset{aa}{\underline{E}} \otimes \underline{I}_c) = \frac{1}{na}\,(\underset{aa}{\underline{E}} \otimes \underset{cc}{\underline{E}})(\underset{aa}{\underline{E}} \otimes \underline{I}_c) =$$

$$= \frac{1}{an}\,a\,\underset{aa}{\underline{E}} \otimes \underset{cc}{\underline{E}} = \frac{1}{n}\,\underline{E} = \underline{P}_1$$

$$\underline{P}_2\underline{P}_3 = \frac{1}{c}\,(\underline{I}_a \otimes \underset{cc}{\underline{E}})\,\frac{1}{a}\,(\underset{aa}{\underline{E}} \otimes \underline{I}_c) = \frac{1}{n}\,(\underset{aa}{\underline{E}} \otimes \underset{cc}{\underline{E}}) =$$

$$= \frac{1}{n}\,\underline{E} = \underline{P}_1$$

Ponieważ $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3$ są macierzami idempotentnymi jako operatory rzutowe, więc

$$\underline{A}_a\underline{A}_e = (\underline{P}_2 - \underline{P}_1)(\underline{I} - \underline{P}_2 - \underline{P}_3 + \underline{P}_1) = \underline{P}_2 - \underline{P}_1 - \underline{P}_2^2 + \underline{P}_1\underline{P}_2 +$$

$$- \underline{P}_2\underline{P}_3 + \underline{P}_1\underline{P}_3 + \underline{P}_2\underline{P}_1 - \underline{P}_1^2 = -2\underline{P}_1 + \underline{P}_1\underline{P}_2 - \underline{P}_2\underline{P}_3 + \underline{P}_1\underline{P}_3 +$$

$$+ \underline{P}_2\underline{P}_1 = -2\cdot\frac{1}{n}\,\underline{E} + \frac{1}{n}\,\underline{E} - \frac{1}{n}\,\underline{E} + \frac{1}{n}\,\underline{E} + \frac{1}{n}\,\underline{E} = \underline{0}$$

Podobnie dowodzi się relacji $\underline{A}_c\underline{A}_e = \underline{0}$ i $\underline{A}_a\underline{A}_c = \underline{0}$. Dowód twierdzenia 2.3.1. jest zakończony.

IV. Twierdzenie 2.3.2. Przy założeniu (2.3.3) formy kwadratowe

$$\frac{SS_a}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_a\underline{y}}{\sigma_e^2}, \quad \frac{SS_c}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_c\underline{y}}{\sigma_e^2} \quad \text{i} \quad \frac{SS_e}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}}{\sigma_e^2}$$

mają rozkłady chi-kwadrat odpowiednio z $\nu_a = a-1$ stopniami swobody przy hipotezie $\alpha_i = 0$ $(i=1,2,\ldots,a)$, z $\nu_c = c-1$ stopniami swobody przy hipotezie $\gamma_j = 0$ $(j=1,2,\ldots,c)$, z $\nu_e=(a-1)(c-1)$ stopniami swobody. Forma kwadratowa $\frac{SS_y}{\sigma_e^2}$ ma centralny rozkład chi-kwadrat z $n-1$ stopniami swobody przy założeniu słuszności obu hipotez: $\alpha_i = 0$ oraz $\gamma_j=0$ $(i=1,2,\ldots,a;\ j=1,2,\ldots,c)$.

Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 2.2.2. Wykazuje się, że macierze $\underline{A}_a$, $\underline{A}_c$, $\underline{A}_e$ i $\underline{A}_y$ są idempotentne i że ich rzędami są odpowiednio: $a-1$, $c-1$, $(a-1)(c-1)$ i $n-1$. Wykażemy tylko, że

$$r(\underline{A}_e) = (a-1)(c-1)$$

Rzeczywiście, korzystając z (1.4.8), (1.4.22) i mając na uwadze, że macierze $\underline{X}_2$ i $\underline{X}_3$ mają wymiary $n\times a$ i $n\times c$ otrzymujemy

$$r(\underline{A}_e) = tr(\underline{A}_e) = tr\underline{I}_n - tr\underline{P}_2 - tr\underline{P}_3 + tr\underline{P}_1 = n-a-c+1 = (a-1)(c-1)$$

Nadto wobec tego, że iloczyn macierzy formy kwadratowej $\frac{\underline{y}'\underline{A}_r\underline{y}}{\sigma_e^2}$ $(r=a,c,e)$ i macierzy kowariancji $I\sigma_e^2$ wektora $\underline{y}$ jest macierzą idempotentną $\underline{A}_r$ możemy wykorzystać twierdzenie 1.5.1. Dowód kończymy, wykazując, że zerami są parametry niecentralności

Tablica 2.3.1

Analiza wariancji dla zrównoważonej podwójnej klasyfikacji krzyżowej z jedną obserwacją w każdej podklasie /dla bloków kompletnie zrandomizowanych/

Źródło zmienności	Stpnie swobody ν	Suma kwadratów odchyleń SS	Średni kwadrat $V = \frac{SS}{\nu}$	Wartość oczekiwana średniego kwadratu $\mathcal{E}(V)$	Funkcja testowa F
1	2	3	4	5	6
1. Między obiektami, A	$\nu_a = a-1$	$SS_a = \underline{y}'\left[\underline{P}_a - \underline{P}_1\right]\underline{y}$	V_a	$c\,\sigma_a^2 + \sigma_e^2$	$F_a = \frac{V_a}{V_e}$
2. Między blokami, C	$\nu_c = c-1$	$SS_c = \underline{y}'\left[\underline{P}_c - \underline{P}_1\right]\underline{y}$	V_c	$a\,\sigma_c^2 + \sigma_e^2$	$F_c = \frac{V_c}{V_e}$
3. Reszta	$\nu_e = (a-1)(c-1)$	$SS_e = \underline{y}'\left[\underline{I} - \underline{P}_a - \underline{P}_c + \underline{P}_1\right]\underline{y}$	V_e	σ_e^2	—
4. Całość	$\nu_y = n-1$	$SS_y = \underline{y}'\left[\underline{I} - \underline{P}_1\right]\underline{y}$	—	—	—

λ dla zmiennej losowej chi-kwadrat $\frac{SS_a}{\sigma_e^2}$ przy hipotezie $\alpha_i=0$, $(i=1,2,\ldots,a)$, zmiennej losowej chi-kwadrat $\frac{SS_c}{\sigma_e^2}$ przy hipotezie $\gamma_j = 0$ $(i=1,2,\ldots,c)$, zmiennej losowej chi-kwadrat $\frac{SS_e}{\sigma_e^2}$ przy prawdziwych lub nieprawdziwych wymienionych hipotezach, zmiennej losowej chi-kwadrat $\frac{SS_y}{\sigma_e^2}$ przy założeniu prawdziwości obu hipotez.

W tablicy 2.3.1 sumy kwadratów SS_a, SS_c, SS_e i SS_y mają następujące postaci niemacierzowe

$$SS_a = c\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y})^2, \quad SS_c = a\sum_{j=1}^{c}(y_{.j}-\bar{y})^2,$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{c}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y})^2,$$

$$SS_y = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{c}(y_{ij}-\bar{y})^2,$$ gdzie $\bar{y}_{i.} = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{c}y_{ij}$ jest średnią i-tego obiektu,

$\bar{y}_{.j} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}y_{ij}$ — średnią j-tego bloku,

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{c} y_{ij}$ — średnią ogólną.

Nadto używamy tu oznaczeń:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}, \quad \sigma_c^2 = \frac{\sum_{j=1}^{c}\gamma_j^2}{c-1}$$

V. Wartości oczekiwane średnich kwadratów dla obiektów V_a, bloków V_c i błędu V_e uzyskano ze wzoru (1.4.9) i zestawiono w tablicy 2.3.1 w kolumnie 5. Rachujemy analogicznie jak w poprzednim paragrafie.

VI. Funkcje testowe F wymienione w kolumnie 6 tablicy 2.3.1 wyznaczamy analogicznie jak w paragrafie poprzednim.

2.4. Kwadrat łaciński

I. Rozważamy układ eksperymentalny z $n=c^2$ jednostkami eksperymentalnymi podlegającymi podwójnej klasyfikacji krzyżowej ze względu na c wierszy i c kolumn. Nadto obserwujemy c obiektów powtarzanych c-krotnie, które losowo przypisujemy wymienionym jednostkom przy warunku, że każdy z obiektów występuje jeden i tylko jeden raz w każdym wierszu i w każdej kolumnie.

Układowi kwadratu łacińskiego odpowiada model matematyczny postaci (por. Oktaba [41]):

$$y_{mij} = \mu + \delta_m + \alpha_i + \gamma_j + e_{mij} = \mu_{mij} + e_{mij} \qquad (i,j,m = 1,2,\ldots,c) \tag{2.4.1}$$

gdzie y_{mij} oznacza obserwację m-tego obiektu przypadającego na skrzyżowaniu i-tego wiersza z j-tą kolumną, μ - średnią ogólną,

$$\varepsilon(y_{mij}) = \mu_{mij} = \mu + \delta_m + \alpha_i + \gamma_j \tag{2.4.2}$$

średnią populacji m-tego obiektu z i-tego wiersza oraz j-tej kolumny, δ_m - efekt m-tego obiektu, α_i - efekt i-tego wiersza, γ_j - efekt j-tej kolumny, e_{mij}-błąd eksperymentalny związany z y_{mij}.

Poza stałymi $\mu_{mij}, \mu, \alpha_i, \gamma_j$ oraz δ_m w modelu występują zmienne losowe y_{mij} oraz e_{mij}.

Zakładamy, że

(2.4.3) $y_{mij} \text{ — } NN(\mu_{mij}, \sigma_e^2)$ lub że $e_{mij} \text{ — } NN(0, \sigma_e^2)$

W notacji macierzowej zapisujemy to założenie jako

(2.4.4) $\underline{y} \text{ — } N(\underline{\mu}, \sigma_e^2 \cdot \underline{I})$ lub $\underline{e} \text{ — } N(\underline{0}, \sigma_e^2 \cdot \underline{I})$

gdzie $\underline{y}$ i $\underline{e}$ są odpowiednio wektorami kolumnowymi n obserwacji i tyluż błędów eksperymentalnych.

Model (2.4.1) w symbolice macierzowej ma postać

(2.4.5) $$\underline{y} = \underline{X}\,\underline{\beta} + \underline{e} = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4]\,\underline{\beta} + \underline{e} =$$
$$= \underline{X}_1\mu + \underline{X}_2\underline{\delta} + \underline{X}_3\underline{\alpha} + \underline{X}_4\underline{\gamma} + \underline{e}$$

gdzie

(2.4.6) $$\underline{X} = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4]$$

jest macierzą układu określonego przez cztery następujące macierze blokowe: $\underline{X}_1$ - dla średniej μ, $\underline{X}_2 = \underline{X}_d$ - dla obiektów, $\underline{X}_3 = \underline{X}_a$ - dla wierszy i $\underline{X}_4 = \underline{X}_c$ - dla kolumn:

(2.4.7) $\underline{X}_1=\underline{E}_n$, $\underline{X}_2=\underline{X}_d$, $\underline{X}_3=\underline{X}_a=\underline{E}_c \otimes \underline{I}_c$, $\underline{X}_4=\underline{I}_c \otimes \underline{E}_c$

Relacje dla macierzy $\underline{X}_2$ zestawiono w (2.4.15).

Wektor $\underline{\beta}$ obejmuje odpowiednie wektory parametrów dla μ, $\underline{\delta}$ - dla obiektów, $\underline{\alpha}$ - dla wierszy i $\underline{\gamma}$ - dla kolumn:

(2.4.8) $$\underline{\beta}' = [\mu \vdots \underline{\delta}' \vdots \underline{\alpha}' \vdots \underline{\gamma}'].$$

II. Dla kwadratu łacińskiego ma miejsce następująca tożsamość

(2.4.9) $$SS_y = SS_d + SS_a + SS_c + SS_e$$

gdzie suma kwadratów dla wszystkich wyników SS_y jest określona wzorem (2.2.14) a

(2.4.10) $SS_d = \underline{y}'\underline{A}_d\underline{y}$

(2.4.11) $SS_a = \underline{y}'\underline{A}_a\underline{y}$

(2.4.12) $SS_c = \underline{y}'\underline{A}_c\underline{y}$

(2.4.13) $SS_e = \underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}$

są odpowiednio sumami kwadratów (por. tablica 2.4.1) dla 1) obiektów, 2) wierszy, 3) kolumn i 4) błędu eksperymentalnego. Symbole $\underline{P}_1 = \frac{1}{n}\cdot\underline{E}$, $\underline{P}_2=\underline{P}_d$, $\underline{P}_3=\underline{P}_a$, $\underline{P}_4=\underline{P}_c$, $\underline{P}_n=\underline{I}_n$ oznaczają operatory rzutowe i wyrażają się wzorami (2.3.12) przy i=1,2,3,4 przy czym macierze $\underline{A}_i$ form kwadratowych (2.4.10), (2.4.11), (2.4.12) i (2.4.13) są postaci (por. Oktaba [44]):

(2.4.14) $\underline{A}_d = \underline{P}_d - \underline{P}_1$, $\underline{A}_a = \underline{P}_a - \underline{P}_1$, $\underline{A}_c = \underline{P}_c - \underline{P}_1$,

$$\underline{A}_e = \underline{P}_n - \underline{P}_d - \underline{P}_a - \underline{P}_c + 2\underline{P}_1$$

Wobec (2.2.14), (2.4.10), (2.4.11), (2.4.12) i (2.4.13) dowód tożsamości (2.4.9) jest natychmiastowy

$$\underline{y}'(\underline{P}_d - \underline{P}_1 + \underline{P}_a - \underline{P}_1 + \underline{P}_c - \underline{P}_1 + \underline{P}_n - \underline{P}_d - \underline{P}_a - \underline{P}_c + 2\underline{P}_1)\underline{y} =$$

$$= SS_d + SS_a + SS_c + SS_e = \underline{y}'(\underline{P}_n - \underline{P}_1)\underline{y} = \underline{y}'(\underline{I} - \underline{P}_1)\underline{y} = SS_y$$

Postaci sum kwadratów SS_d, SS_a, SS_c, SS_e i SS_y w formie niemacierzowej podano poniżej.

Dla losowo wybranego schematu kwadratu łacińskiego macierz $\underline{X}_2$, ma określoną postać, różną dla różnych schematów, jakkolwiek macierze $\underline{X}_3$ i $\underline{X}_4$ są niezmienne. Tym niemniej dla różnych schematów kwadratu łacińskiego ze względu na jego definicję zachodzą następujące proste relacje:

$$
(2.4.15)\quad \begin{cases}
\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3'\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_4'\mathbf{X}_4 = c\mathbf{I}_c \\
\mathbf{X}_3\mathbf{X}_3' = \underset{cc}{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{I}_c,\ \mathbf{X}_4\mathbf{X}_4' = \mathbf{I}_c \otimes \underset{cc}{\mathbf{E}} \\
\text{Każdy z wierszy i każda z kolumn macierzy } \mathbf{X}_2\mathbf{X}_2', \\
\mathbf{X}_3\mathbf{X}_3',\ \mathbf{X}_4\mathbf{X}_4' \text{ ma } c \text{ jedynek} \\
\mathbf{E}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_2' = \mathbf{E}\mathbf{X}_3\mathbf{X}_3' = \mathbf{E}\mathbf{X}_4\mathbf{X}_4' = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_2'\mathbf{E} = \mathbf{X}_3\mathbf{X}_3'\mathbf{E} = \mathbf{X}_4\mathbf{X}_4'\mathbf{E} = c\mathbf{E}, \\
\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_4 = \mathbf{X}_3'\mathbf{X}_4 = \underset{cc}{\mathbf{E}} \\
\underset{nc}{\mathbf{X}_2}\,\underset{cc}{\mathbf{E}} = \mathbf{X}_3\,\underset{cc}{\mathbf{E}} = \mathbf{X}_4\,\underset{cc}{\mathbf{E}} = \underset{nc}{\mathbf{E}} \\
\underset{nc}{\mathbf{E}}\,\mathbf{X}_2' = \mathbf{E}\mathbf{X}_3' = \mathbf{E}\mathbf{X}_4' = \mathbf{E}\,,\ \mathbf{X}_2\mathbf{E} = \mathbf{X}_3\mathbf{E} = \underset{nc}{\mathbf{X}_4}\,\underset{cc}{\mathbf{E}} = \underset{nc}{\mathbf{E}}
\end{cases}
$$

III. Twierdzenie 2.4.1. Gdy $\underline{y} \sim N(\underline{\mu}, \mathbf{I}\sigma^2)$, to sumy kwadratów SS_d, SS_a, SS_c i SS_e są stochastycznie niezależne.

Dowód przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 2.2.1. Korzystając z twierdzenia 1.5.3 o niezależności stochastycznej form kwadratowych wystarczy wykazać słuszność następujących związków:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_d\mathbf{A}_a = \mathbf{A}_d\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_d\mathbf{A}_e = \mathbf{A}_a\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_a\mathbf{A}_e = \mathbf{A}_c\mathbf{A}_e\ .$$

Dla ilustracji metody wykażemy, że $\mathbf{A}_d\mathbf{A}_a = \mathbf{0}$. Wobec (2.4.15) mamy

$$(\mathbf{X}_d'\mathbf{X}_d)^{-1} = (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1} = \frac{1}{c}\,\mathbf{I}_c$$

oraz

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_3 = \underset{cc}{\mathbf{E}} \quad \text{i} \quad \mathbf{X}_2\,\underset{cc}{\mathbf{E}} = \underset{nc}{\mathbf{E}}$$

Zatem

$$(2.4.16)\qquad \mathbf{P}_d\mathbf{P}_a = \mathbf{X}_d(\mathbf{X}_d'\mathbf{X}_d)^{-1}\,\mathbf{X}_d'\mathbf{X}_a(\mathbf{X}_a'\mathbf{X}_a)^{-1}\,\mathbf{X}_a' = \frac{1}{c^2}\,\mathbf{X}_d\,\underset{cc}{\mathbf{E}}\,\mathbf{X}_3' =$$

$$= \frac{1}{c^2}\,\underset{nc}{\mathbf{E}}\,\mathbf{X}_3' = \frac{1}{n}\,\mathbf{E}$$

Nadto z (2.4.15) mamy

$$\frac{\underline{X}_d}{nc}\frac{\underline{E}}{cn} = \underline{E}\,, \qquad \frac{\underline{X}_d'}{cn}\,\underline{E} = \frac{c\underline{E}}{cn}$$

Stąd

$$(2.4.17)\qquad \underline{P}_d\cdot\underline{P}_1 = \frac{1}{n}\,\underline{X}_d(\underline{X}_d'\underline{X}_d)^{-1}\,\underline{X}_d'\underline{E} = \frac{1}{n}\,\underline{X}_d\cdot\frac{1}{c}\,\underline{I}_c\cdot\underline{X}_d'\underline{E} =$$

$$= \frac{1}{nc}\,\underline{X}_d\underline{X}_d'\underline{E} = \frac{1}{n}\,\underline{X}_d\,\frac{\underline{E}}{cn} = \frac{1}{n}\,\underline{E}$$

$$(2.4.18)\qquad \underline{P}_1\underline{P}_a = \frac{1}{n}\,\underline{E}\underline{X}_a(\underline{X}_a'\underline{X}_a)^{-1}\,\underline{X}_a' = \frac{1}{n}\,\underline{E}\cdot\underline{X}_a\cdot\frac{1}{c}\,\underline{I}_c\cdot\underline{X}_a' =$$

$$= \frac{1}{nc}\,\underline{E}\underline{X}_a\underline{X}_a' = \frac{1}{nc}\,c\underline{E} = \frac{1}{n}\,\underline{E}$$

gdyż $\underline{X}_3\underline{X}_3' = \underline{X}_a\underline{X}_a' = \frac{\underline{E}}{cc}\otimes\underline{I}_c$, (por. (2.4.15)) i $\underline{E}\underline{X}_a\underline{X}_a' = c\underline{E}$

Wobec (2.4.16), (2.4.17) i (2.4.18) i idempotentności $\underline{P}_1$ mamy

$$\underline{A}_d\underline{A}_a = (\underline{P}_d - \underline{P}_1)(\underline{P}_a - \underline{P}_1) = \underline{P}_d\underline{P}_a - \underline{P}_d\underline{P}_1 - \underline{P}_1\underline{P}_a + \underline{P}_1^2 =$$

$$= \underline{P}_d\underline{P}_a - \underline{P}_d\underline{P}_1 - \underline{P}_1\underline{P}_a + \underline{P}_1 = \frac{1}{n}\,\underline{E} - \frac{1}{n}\,\underline{E} - \frac{1}{n}\,\underline{E} + \frac{1}{n}\,\underline{E} = \underline{0}$$

W podobny sposób dowodzi się relacji $\underline{A}_d\underline{A}_c = \underline{A}_d\underline{A}_e = \underline{0}$ i pozostałych.

Dowód twierdzenia 2.4.1 jest zakończony.

IV. <u>Twierdzenie 2.4.2.</u> Przy założeniu (2.4.4) formy kwadratowe

$$\frac{SS_d}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{Y}'\underline{A}_d\underline{Y}}{\sigma_e^2}\,, \qquad \frac{SS_a}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{Y}'\underline{A}_a\underline{Y}}{\sigma_e^2}\,, \qquad \frac{SS_c}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{Y}'\underline{A}_c\underline{Y}}{\sigma_e^2}$$

i

$$\frac{SS_e}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{Y}'\underline{A}_e\underline{Y}}{\sigma_e^2}$$

mają rozkłady chi-kwadrat odpowiednio z $\nu_d = c-1$ stopniami swobody przy hipotezie $\delta_m = 0$ $(m=1,2,\dots,c)$, z $\nu_a = c-1$ stopniami swobody przy hipotezie $\alpha_i = 0$ $(i=1,2,\dots,c)$, z $\nu_c = c-1$ stopniami swobody przy hipotezie $\gamma_j = 0$

($j=1,2,\ldots,c$), z $\nu_e = (c-1)(c-2)$ stopniami swobody. Forma kwadratowa $\frac{SS_y}{\sigma_e^2}$ ma centralny rozkład chi-kwadrat z $\nu_y = n-1$ stopniami swobody przy założeniu słuszności trzech wymienionych hipotez.

Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 2.2.2.

Sumy kwadratów podane w tablicy 2.4.1 mają następujące postaci niemacierzowe:

$$SS_d = c\sum_{m=1}^{c}(\bar{y}_{..m} - \bar{y})^2, \quad SS_a = c\sum_{i=1}^{c}(\bar{y}_{i..} - \bar{y})^2,$$

$$SS_c = c\sum_{j=1}^{c}(\bar{y}_{.j} - \bar{y})^2, \quad SS_e = \sum_{(ijm)}^{n}(y_{ijm} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..m} + 2\bar{y})^2$$

$$SS_y = \sum_{(ijm)}^{n}(y_{ijm} - \bar{y})^2,$$

gdzie znak $\sum\limits_{(ijm)}^{n}$ określa sumowanie po wszystkich n obserwacjach.

$$\bar{y}_{..m} = \frac{1}{c}\sum_{(ij)}^{c} y_{ijm}, \quad \bar{y}_{i..} = \frac{1}{c}\sum_{(jm)}^{c} y_{ijm},$$

$$\bar{y}_{.j.} = \frac{1}{c}\sum_{(im)}^{c} y_{ijm}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{(ijm)}^{n} y_{ijm}$$

są odpowiednio średnimi m-tego obiektu, i-tego wiersza, j-tej kolumny, średnią ogólną. Znak $\sum\limits_{(ij)}^{c} y_{ijm}$ określa sumowanie po c obserwacjach przy ustalonym wskaźniku m oraz zmiennych i, j. Analogiczne znaczenia mają symbole $\sum\limits_{(jm)}^{c} y_{ijm}$, $\sum\limits_{(im)}^{c} y_{ijm}$.

Nadto używamy skróconych oznaczeń

Tablica 2.4.1.

Analiza wariancji dla kwadratu łacińskiego

Źródło zmienności	Stopnie swobody ν	Suma kwadratów odchyleń SS	Średni kwadrat $V = \frac{SS}{\nu}$	Wartość oczekiwana średniego kwadratu $\mathcal{E}(V)$	Funkcja testowa F
1	2	3	4	5	6
1. Między obiektami, D	$\nu_d = c-1$	$SS_d = \underline{y}'\left[\underline{P}_d - \underline{P}_1\right]\underline{y}$	V_d	$c\sigma_d^2 + \sigma_e^2$	$F_d = \frac{V_d}{V_e}$
2. Między wierszami, A	$\nu_a = c-1$	$SS_a = \underline{y}'\left[\underline{P}_a - \underline{P}_1\right]\underline{y}$	V_a	$c\sigma_a^2 + \sigma_e^2$	$F_a = \frac{V_a}{V_e}$
3. Między kolumnami, C	$\nu_c = c-1$	$SS_c = \underline{y}'\left[\underline{P}_c - \underline{P}_1\right]\underline{y}$	V_c	$c\sigma_c^2 + \sigma_e^2$	$F_c = \frac{V_c}{V_e}$
4. Reszta	$\nu_e = (c-1)(c-2)$	$SS_e = \underline{y}'\left[\underline{I} - \underline{P}_d - \underline{P}_a - \underline{P}_c + 2\underline{P}_1\right]\underline{y}$	V_e	σ_e^2	—
5. Całość	$\nu_y = n-1$	$SS_y = \underline{y}'\left[\underline{I} - \underline{P}_1\right]\underline{y}$	—	—	—

$$\sigma_d^2 = \frac{\sum_{m=1}^{c}\delta_m^2}{c-1}, \quad \sigma_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^{c}\alpha_i^2}{c-1}, \quad \sigma_c^2 = \frac{\sum_{j=1}^{c}\gamma_j^2}{c-1}$$

V. Wartości oczekiwane średnich kwadratów V_d, V_a, V_c i V_e uzyskano ze wzoru (1.4.9) i zestawiono w 5-tej kolumnie tablicy 2.4.1.

VI. Funkcje testowe F podano w 6-tej kolumnie tablicy 2.4.1. wyznaczamy analogicznie jak w paragrafie drugim.

2.5. Układ pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych (model mieszany)

I. Rozważamy układ eksperymentalny z dwoma stałymi czynnikami A i C występującymi odpowiednio w a i c poziomach (por.E.Niedokos [39]). W sumie mamy ac kombinacji, które tworzą jedną replikację. Powtarzamy je r-krotnie, uzyskując łącznie n = rac obserwacji. Każdą z replikacji dzielimy na a bloków po c jednostek eksperymentalnych w bloku. Poziomy $a_1, a_2, \ldots, a_a$ czynnika A rozlosujemy wewnątrz każdej replikacji oddzielnie. W zakresie każdego bloku przypisujemy losowo jednostkom eksperymentalnym poziomy $c_1, c_2, \ldots, c_c$ czynnika C. W ten sposób układ zostaje określony przez podwójne losowanie: 1) bloków i 2) w blokach.

W układzie takim, zwanym układem pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych, z większą dokładnością porównuje się efekty wewnątrzblokowe tj. efekty czynnika B niż międzyblokowe tj. efekty czynnika A.

Układowi odpowiada stały model matematyczny postaci (por. Oktaba [42]).

(2.5.1) $$y_{ijk} = \mu + \varrho_i + \alpha_j + d_{ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{jk} + e_{ijk}$$
$$(i = 1,\dots,r;\quad j = 1,\dots,a;\quad k = 1,\dots,c)$$

gdzie y_{ijk} oznacza obserwację pochodzącą od kombinacji k-tego poziomu czynnika C i j-tego poziomu czynnika A w i-tej replikacji, μ - średnią ogólną populacji, ϱ_i - efektem i-tej replikacji, α_j - efektem j-tego poziomu czynnika A, γ_k-efektem k-tego poziomu czynnika C, d_{ij}-efektem interakcji i-tej replikacji z j-tym poziomem czynnika A, $(\alpha\gamma)_{jk}$-efektem interakcji j-tego poziomu czynnika A z k-tym poziomem czynnika C.

Wielkość d_{ij} gra rolę t.zw. pierwszego błędu eksperymentalnego związanego z jednostką eksperymentalną, którą jest blok, a e_{ijk}- drugiego błędu eksperymentalnego, związaną z poszczególnymi obserwacjami y_{ijk}. Poza stałymi: μ, ϱ_i, γ_k, $(\alpha\gamma)_{jk}$ w modelu występują trzy zmienne losowe: y_{ijk}, d_{ij} oraz e_{ijk}. Przyjmujemy restrykcje

(2.5.2) $$\sum_i \varrho_i = \sum_j \alpha_j = \sum_k \gamma_k = \sum_j (\alpha\gamma)_{jk} = \sum_k (\alpha\gamma)_{jk} = 0$$

Zakładamy, że zarówno korelacje między błędami e_{ijk} są równe zeru jak i korelacje między d_{ij} oraz korelacje między e i d są równe zeru oraz że

(2.5.3) $$\mathcal{E} y_{ijk} = \mu_{ijk} = \mu + \varrho_i + \alpha_j + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{jk}$$

(2.5.4) $$d_{ij} \longrightarrow NN(0, \sigma_d^2), \quad e_{ijk} \longrightarrow NN(0, \sigma_e^2)$$

Można wykazać, że jeżeli elementami macierzy kowariancji wektora $\underline{y}$ są σ_{ijk} (por.Niedokos [39]), to

(2.5.5) $$\sigma_{ijk} = \mathrm{Cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) = \delta_{ii'} \cdot \delta_{jj'} \cdot \sigma_d^2 + \delta_{jj'} \cdot \delta_{kk'} \cdot \sigma_e^2$$

gdzie

(2.5.6) $$\delta_{ii'} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = i' \\ 0 & \text{gdy } i \neq i' \end{cases}$$

są deltami Kroneckera.

W notacji macierzowej mieszany model (2.5.1) przybiera postać

(2.5.7) $\underline{y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{e} = \underline{X}_1\mu + \underline{X}_2\underline{\varrho} + \underline{X}_3\underline{\alpha} + \underline{X}_4\underline{d} + \underline{X}_5\underline{\gamma} + \underline{X}_6(\underline{\alpha\gamma}) + \underline{e}$

gdzie $\underline{X}_1 = \underline{E}_n$ oraz

(2.5.8) $\underline{y} — N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$,

przy czym

(2.5.9) $\underline{\mu} = \mathcal{E}(\underline{y}) = \underline{X}_1\mu + \underline{X}_2\underline{\varrho} + \underline{X}_3\underline{\alpha} + \underline{X}_5\underline{\gamma} + \underline{X}_6(\underline{\alpha\gamma})$

oraz

(2.5.10) $\underline{d} — N(\underline{0}, \sigma_d^2 \cdot \underline{I}_{ar})$, $\underline{e} — N(\underline{0}, \sigma_e^2 \cdot \underline{I}_n)$.

Macierz kowariancji $\underline{\Sigma}$ wektora obserwacji $\underline{y}$ jest postaci (2.5.22).

II. Wykażemy słuszność tożsamości

(2.5.11) $SS_y = SS_r + SS_a + SS_{ar} + SS_c + SS_{ac} + SS_e$

to jest tożsamości

(2.5.12) $SS_y = \underline{y}'\underline{A}_y\underline{y} = \underline{y}'(\underline{I} - \frac{1}{n}\underline{E})\underline{y} = \sum_i^6 \underline{y}'\underline{A}_i\underline{y} = \sum_i^6 SS_i$

(i = r,a,ar,c,ac,e)

gdzie n = rac oraz

(2.5.13) $SS_i = \underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}$ (i = r,a,ar,c,ac,e)

przy czym zgodnie z regułą (por. Oktaba [44]) mamy

$$(2.5.14)\quad \begin{cases} \underline{A}_y=\underline{I}-\underline{P}_1, & \underline{A}_r=\underline{P}_r-\underline{P}_1, \quad \underline{A}_a=\underline{P}_a-\underline{P}_1, \quad \underline{A}_{ra}=\underline{P}_{ra}-\underline{P}_r-\underline{P}_a+\underline{P}_1, \\ \underline{A}_c=\underline{P}_c-\underline{P}_1, & \underline{A}_{ac}=\underline{P}_{ac}-\underline{P}_a-\underline{P}_c+\underline{P}_1, \\ \underline{A}_e= \underline{I}-\underline{P}_{ac}-\underline{P}_a-\underline{P}_{ar} & \end{cases}$$

gdzie $\underline{P}_n = \underline{P}_{rac} = \underline{I} = \underline{I}_n$, $\underline{P}_1 = \frac{1}{n}\underline{E}$ i gdzie operatory

(2.5.15) $\underline{P}_i = \underline{X}_i(\underline{X}_i' \underline{X}_i)^{-1} \underline{X}_i'$ (i = 1,r,a,ar,c,ac)

Wyrażenia SS_y i SS_i występujące w (2.5.13) są sumami kwadratów odpowiednio dla 1) wszystkich wyników, 2) replikacji R, 3) czynnika A, 4) interakcji RA (t.zw. błędu a), 5) czynnika C, 6) interakcji AC i 7) błędu e. Macierz $\underline{X}$ układu eksperymentalnego jest postaci

$$(2.5.16)\qquad \underline{X} = [\underline{E}_n \vdots \underline{X}_r \vdots \underline{X}_a \vdots \underline{X}_{ra} \vdots \underline{X}_c \vdots \underline{X}_{ac}] = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4 \vdots \underline{X}_5 \vdots \underline{X}_6]$$

a wektorem efektów jest

$$(2.5.17)\qquad \underline{\beta}' = [\mu \vdots \underline{\varrho}' \vdots \underline{\alpha}' \vdots (\underline{\varrho\alpha})' \vdots \underline{\gamma}' \vdots (\underline{\alpha\gamma})']$$

gdzie macierze blokowe macierzy $\underline{X}$ są postaci (por. Oktaba 45):

$$(2.5.18)\qquad \begin{cases} \underline{X}_1 = \underline{E}_n \\ \underline{X}_r = \underline{I}_r \otimes \underline{E}_a \otimes \underline{E}_c \\ \underline{X}_a = \underline{E}_r \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{E}_c \\ \underline{X}_{ra} = \underline{I}_r \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{E}_c \\ \underline{X}_c = \underline{E}_r \otimes \underline{E}_a \otimes \underline{I}_c \\ \underline{X}_{ac} = \underline{E}_r \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{I}_c \end{cases}$$

przy czym $\underline{E}_{ac}$ oznacza wektor kolumnowy z ac jedynkami.

Wobec (2.5.18) otrzymujemy

$$(2.5.19)\qquad \begin{cases} \underline{X}_r'\underline{X}_r = ac\underline{I}_r, \quad \underline{X}_a'\underline{X}_a = rc\underline{I}_a, \quad \underline{X}_{ra}'\underline{X}_{ra} = c\underline{I}_{ar}, \\ \underline{X}_c'\underline{X}_c = ra\underline{I}_c, \quad \underline{X}_{ac}'\underline{X}_{ac} = r\underline{I}_{ac} \end{cases}$$

Z uwagi na (2.5.18) macierze $\underline{A}_i$ (i=r,a,ra,c,ac,e) można przedstawić w następującej postaci (por. Ogasawara i Takahashi [40]):

$$(2.5.20)\qquad \begin{cases} \underline{A}_r = \underline{P}_r - \underline{P}_1 = \frac{1}{ac}(\underline{I}_r \otimes \underset{ac\,ac}{\underline{E}}) - \underline{P}_1 \\ \underline{A}_a = \underline{P}_a - \underline{P}_1 = \frac{1}{cr}(\underset{rr}{\underline{E}} \otimes \underline{I}_a \otimes \underset{cc}{\underline{E}}) - \underline{P}_1 \\ \underline{A}_{ra} = \frac{1}{c}(\underline{I}_{ar} \otimes \underset{cc}{\underline{E}}) - (\underline{P}_1 + \underline{A}_r + \underline{A}_a) \end{cases}$$

$$
(2.5.20)\qquad \left|\begin{array}{l}
\underline{A}_c = \frac{1}{ar}\,(\underline{E}_{ar}\ \underline{I}_c) - \underline{P}_1 \\
\underline{A}_{ac} = \frac{1}{r}\,(\underline{E}_{rr}\ \underline{I}_{ac}) - (\underline{P}_1 + \underline{A}_a + \underline{A}_c) \\
\underline{A}_e = \underline{I}_n - (\underline{P}_1 + \underline{A}_r + \underline{A}_a + \underline{A}_{ra} + \underline{A}_c + \underline{A}_{ac})
\end{array}\right.
$$

Wobec (2.2.14) i (2.5.13) dowód tożsamości (2.5.11) jest bezpośredni.

Postaci sum kwadratów podane w tych wzorach w formie niemacierzowej przedstawiono poniżej w tablicy analizy wariancji.

Z (2.5.12) wynika

$$(2.5.21)\qquad \underline{A}_y = \underline{I}_n - \frac{1}{n}\underline{E} = \underline{A}_r + \underline{A}_a + \underline{A}_{ra} + \underline{A}_c + \underline{A}_{ac} + \underline{A}_e$$

Zauważmy, że macierzą kowariancji $\not{\Sigma}$ wektora $\underline{y}$ jest (por. Mikos [33])

$$(2.5.22)\qquad \not{\Sigma} = \underline{X}_{ra}\not{\Sigma}_{ra}\underline{X}'_{ra} + \not{\Sigma}_e = c\,\sigma^2_{ra}(\underline{A}_r + \underline{A}_a + \underline{A}_{ra} + \underline{P}_1) + \sigma^2_e\,\underline{I}_n = \underline{I}_{ar}\otimes\underline{E}_{cc}\,\sigma^2_{ra} + \sigma^2\,\underline{I}_n$$

a wobec

$$\underline{I}_n = \underline{A}_r + \underline{A}_a + \underline{A}_{ra} + \underline{A}_c + \underline{A}_{ac} + \underline{A}_e + \underline{P}_1,$$

otrzymujemy

$$(2.5.23)\qquad \not{\Sigma} = w_r\underline{A}_r + w_a\underline{A}_a + w_{ra}\underline{A}_{ra} + w_c\underline{A}_c + w_{ac}\underline{A}_{ac} + w_e\underline{A}_e + w_1\underline{P}_1 = \sum_u^7 w_u\underline{A}_u,$$

gdzie $\underline{P}_1 = \underline{A}_1$ oraz

$$(2.5.24)\qquad w_r = w_a = w_{ra} = c\,\sigma^2_{ra} + \sigma^2_e,\qquad w_e = w_c = w_{ac} = w_1 = \sigma^2_e.$$

Obecnie wykażemy idempotentność i ortogonalność macierzy form kwadratowych. Stwierdzimy również, że formy te mają stochastycznie niezależne rozkłady chi-kwadrat.

Następnie przedstawimy postaci funkcji testowych F dla weryfikacji hipotez statystycznych.

Twierdzenie 2.5.1. Macierze $\underline{A}_i$ $(i = 1, r, a, ra, c, ac, e)$ są idempotentne i parami ortogonalne tj.

(2.5.25) $$\underline{A}_i^2 = \underline{A}_i \quad \text{oraz} \quad \underline{A}_i\underline{A}_j = \underline{0} \quad (i \neq j)$$

gdzie $\underline{A}_1 = \underline{P}_1$.

Dowód bez wykorzystania notacji macierzowej i bez uwzględnienia macierzy $\underline{A}_1$ znajdujemy u Niedokosa [39]. Wykażemy więc, że $\underline{P}_1\underline{A}_i = \underline{0}$ $(i = r, a, ra, c, ac, e)$. Dla $i=r$ mamy kolejno

$$\underline{P}_1\underline{P}_r = \frac{1}{n}\underline{E}\,\frac{1}{ac}(\underline{I}_r \otimes \underline{E}_{ac\,ac}) = \frac{1}{nac}(\underline{E}_{rr} \otimes \underline{E}_{ac\,ac})(\underline{I}_r \otimes \underline{E}_{ac\,ac}) =$$
$$= \frac{1}{n}(\underline{E}_{rr} \otimes \underline{E}_{ac\,ac}) = \frac{1}{n}\underline{E} = \underline{P}_1.$$

Stąd

$$\underline{P}_1\underline{A}_r = \underline{P}_1(\underline{P}_r - \underline{P}_1) = \underline{P}_1\underline{P}_r - \underline{P}_1 = \underline{P}_1 - \underline{P}_1 = \underline{0}.$$

Podobnie dowodzimy, że $\underline{P}_1\underline{A}_i = \underline{0}$ dla $i = a, ra, c, ac, e$.

Twierdzenie 2.5.2. Macierz kowariancji $\underline{\Sigma}$ oraz macierze $\underline{A}_e, \underline{A}_r, \underline{A}_a, \underline{A}_{ra}, \underline{A}_c, \underline{A}_{ac}$ spełniają następujące warunki

(2.5.26) $$\underline{A}_i \underline{\Sigma} = w_i\underline{A}_i \qquad (i = r, a, ra, c, ac, e)$$

gdzie w_i zdefiniowano w (2.5.24).

Dowód: Wykażemy, że słuszność relacji (2.5.26) wynika z (2.5.23) oraz z twierdzenia 2.5.1, że macierze $\underline{P}_1, \underline{A}_i$ $(i=r, a, ra, c, ac, e)$ są idempotentne i parami ortogonalne). Otóż wobec (2.5.23)

$$\underline{A}_i \underline{\Sigma} = \underline{A}_i \sum_u^7 w_u\underline{A}_u = \sum_u^7 w_u\underline{A}_i\underline{A}_u,$$

gdzie $u = r, a, ra, c, ac, e$. Wobec ortogonalności macierzy mamy $\underline{A}_i\underline{A}_u = \underline{0}$ przy $i \neq u$ a wobec idempotentności: $\underline{A}_i^2 = \underline{A}_i$.

Stąd

$$\underline{A}_i \underline{\Sigma} = w_i\underline{A}_i$$

Dowód jest zakończony.

Niech dla krótkości

(2.5.27) $$w = c\sigma_{ra}^2 + \sigma_c^2$$

Twierdzenie 2.5.3. Jeżeli $\underline{y} — N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ oraz $\underline{A}_i \underline{\Sigma} = w_i \underline{A}_i$, to

(2.5.28) $$\frac{\underline{y}' \underline{A}_i \underline{y}}{w_i} = \chi'^2(\nu_i, \lambda_i)$$

gdzie

(2.5.29) $$\nu_i = tr(\underline{A}_i), \quad \lambda_i = \frac{\underline{\mu}' \underline{A}_i \underline{\mu}}{2w_i} \quad (i=r,a,ra,c,ac,e)$$

gdzie λ_i są parametrami niecentralności a w_i zdefiniowano w (2.5.24).

Dowód: Z założenia i idempotentności macierzy A_i wynika

$$\left(\frac{\underline{A}_i \underline{\Sigma}}{w_i}\right)^2 = \frac{(w_i \underline{A}_i)^2}{w_i^2} = \underline{A}_i^2 = \underline{A}_i = \frac{\underline{A}_i \underline{\Sigma}}{w_i}$$

Parametrem niecentralności jest $\lambda = \frac{1}{2} \underline{\mu}' \frac{\underline{A}_i}{w_i} \underline{\mu}$.

Twierdzenie 2.5.4. Jeżeli wektor obserwacji $\underline{y} — N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, to formy kwadratowe

(2.5.30) $$\frac{\underline{y}' \underline{A}_i \underline{y}}{w_i} \quad (i = r,a,ra,c,ac,e)$$

mają niezależne rozkłady $\chi'^2(\nu_i, \lambda_i)$, gdzie ν_i oraz λ_i podano w (2.5.29). Inaczej mówiąc, formy kwadratowe

(2.5.31) $$\frac{\underline{y}' \underline{A}_i \underline{y}}{w} \quad (i=r,a,ra) \quad \text{oraz} \quad \frac{\underline{y}' \underline{A}_j \underline{y}}{\sigma_e^2} \quad (j=c,ac,e)$$

mają niezależne rozkłady niecentralne chi-kwadrat ze stopniami swobody odpowiednio równymi

(2.5.32) r-1, a-1, (a-1)(r-1), c-1, (a-1)(c-1) i a(c-1)(r-1)

oraz z parametrami niecentralności

$$\lambda_r = \frac{\mu' \underline{A}_r \mu}{2w} = \frac{ac \sum_{i=1}^{r} \varrho_i^2}{2w}, \quad \lambda_{ra} = \frac{\mu' \underline{A}_{ra} \mu}{2w} = 0$$

$$(2.5.33) \qquad \lambda_a = \frac{\mu' \underline{A}_a \mu}{2w} = \frac{rc \sum_{j=1}^{a} \alpha_j^2}{2w}, \quad \lambda_c = \frac{\mu' \underline{A}_c \mu}{2\sigma_e^2} = \frac{ar \sum_{k=1}^{c} \gamma_k^2}{2\sigma_e^2}$$

$$\lambda_{ac} = \frac{\mu' \underline{A}_{ac} \mu}{2\sigma_e^2} = \frac{r \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{c} (\alpha\gamma)_{jk}^2}{2\sigma_e^2}, \quad \lambda_e = \frac{\mu' \underline{A}_e \mu}{2\sigma_e^2} = 0$$

Dowód: Z twierdzenia 2.5.1 wiemy, że macierze $\underline{A}_e, \underline{A}_r, \underline{A}_a, \underline{A}_{ra}$, $\underline{A}_c, \underline{A}_{ac}$ i $\underline{A}_1 = \underline{P}_1$ są parami ortogonalne.

Wobec (2.5.20) i (1.4.8) wyznaczamy liczby stopni swobody. Mamy przykładowo:

$$\nu_1 = \nu_r = tr(\underline{A}_r) = tr(\underline{P}_r - \underline{P}_1) = tr(\underline{P}_r) - tr(\underline{P}_1) = r-1$$

Podobnie obliczamy pozostałe liczby stopni swobody.

Zauważmy, że $\lambda_e = \lambda_{ra} = 0$

Obliczamy $\lambda_r, \lambda_a, \lambda_c$ i λ_{ac}. Przykładowo uzyskujemy:

$$\lambda_c = \frac{\mu' \underline{A}_c \mu}{2w_c} = \frac{1}{2w_c}\left[\underline{\gamma}' \underline{X}_c' \underline{A}_c \underline{X}_c \underline{\gamma} + (\underline{\alpha\gamma})' \underline{X}_{ac}' \underline{A}_c \underline{X}_{ac} (\underline{\alpha\gamma})\right] =$$

$$= \frac{1}{2w_c}\Bigg[\underline{\gamma}'(\underline{E}_{ar}' \otimes \underline{I}_c)\left[\frac{1}{ar}({}_{ar}\underline{E}_{ar} \otimes \underline{I}_c) - \frac{1}{n}\underline{E}\right](\underline{E}_{ar} \otimes \underline{I}_c)\underline{\gamma} +$$

$$+ (\underline{\alpha\gamma})'(\underline{E}_r' \otimes \underline{I}_{ac})\left[\frac{1}{ar}({}_{ar}\underline{E}_{ar} \otimes \underline{I}_c) - \frac{1}{n}\underline{E}\right]\left[\underline{E}_r \otimes \underline{I}_{ac}\right](\underline{\alpha\gamma})\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{2w_c}\Bigg[ar\underline{\gamma}'\underline{\gamma} - \frac{ar}{c}\underline{\gamma}' {}_c\underline{E}_c \underline{\gamma} + \frac{r}{a}(\underline{\alpha\gamma})'(\underline{E}_a \otimes \underline{I}_c)(\underline{E}_a' \otimes \underline{I}_c)(\underline{\alpha\gamma}) -$$

$$- \frac{r}{ac}(\underline{\alpha\gamma})' \underline{E}_{ac}(\underline{\alpha\gamma})\Bigg]$$

a wobec restrykcji

$$\underline{E}_a' \underline{\alpha} = 0, \ \underline{E}_c' \underline{\gamma} = 0 \ \text{ i } \ \begin{bmatrix} \underline{I}_a \otimes \underline{E}_c' \\ \underline{E}_a' \otimes \underline{I}_c \end{bmatrix} (\underline{\alpha\gamma}) = 0$$

mamy

$$\lambda_c = \frac{ar}{2w_c}\underline{\gamma}'\underline{\gamma} = \frac{ar}{2w_c}\sum_{k=1}^{c}\gamma_k^2. \quad \text{Podobnie} \quad \lambda_a \quad \text{i} \quad \lambda_{ac}.$$

Dla zakończenia dowodu twierdzenia 2.5.4 pozostaje wykazać niezależność stochastyczną form kwadratowych SS_i tj. niezależność stochastyczną chi-kwadratów. Wiemy, że macierze $\underline{A}_i$ form kwadratowych $\underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}$ są parami ortogonalne (por. tw. 2.5.1) i że zachodzą relacje (2.5.26). Obecnie skorzystamy z twierdzenia 1.5.3 o niezależności form kwadratowych, które podaje warunek $\underline{A}\,\underline{\Sigma}\,\underline{B} = \underline{0}$ na to, aby przy $\underline{y} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ dwie formy kwadratowe $\underline{y}'\underline{A}\underline{y}$ oraz $\underline{y}'\underline{B}\underline{y}$ były stochastycznie niezależne. Ma ono zastosowanie przy dowodzie niezależności stochastycznej sum kwadratów w ANOVA.

Wykażemy, że sumy kwadratów SS_k i $SS_ł$ ($k \neq ł$; $k, ł = r, a, ra, c, ac, e$) mają stochastycznie niezależne rozkłady chi-kwadrat. Mamy więc wykazać, że

$$\underline{A}_k\,\underline{\Sigma}\,\underline{A}_ł = \underline{0}$$

Istotnie, wobec (2.5.26) mamy $\underline{A}_i\underline{\Sigma} = w_i\underline{A}_i$. Dla $i=k$ oraz $i=ł$ otrzymujemy

$$\underline{A}_k\underline{\Sigma} = w_k\underline{A}_k$$

oraz

$$\underline{A}_ł\underline{\Sigma} = w_ł\underline{A}_ł$$

Zatem z uwagi na $\underline{A}_k \cdot \underline{A}_ł = \underline{0}$ mamy

$$\underline{A}_k\,\underline{\Sigma}\,\underline{A}_ł = (\underline{A}_k\underline{\Sigma})\underline{A}_ł = w_k\underline{A}_k \cdot \underline{A}_ł = \underline{0}$$

Zatem wszystkie sumy kwadratów wchodzące do ANOVA są stochastycznie niezależne, a więc mają niezależne rozkłady χ^2.

Dowód twierdzenia 2.5.4 jest zakończony.

Wartości oczekiwane form kwadratowych wyznaczamy korzystając z twierdzenia 1.4.8 oraz z twierdzeń 2.5.2 i 2.5.4. Mamy

$$(2.5.34)\qquad (\underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}) = \mu'\underline{A}_i\mu + \mathrm{tr}(\underline{A}_i \not\Sigma) = 2w_i\lambda_i + w_i\,\mathrm{tr}(\underline{A}_i) =$$

$$= 2w_i\lambda_i + w_i\nu_i \qquad (i=e,r,a,ra,c,ca)$$

Przy hipotezach zerowych $\underline{\varrho}=\underline{0}$, $\underline{\alpha}=\underline{0}$, $\underline{\gamma}=\underline{0}$, $\underline{\alpha\gamma}=\underline{0}$ na podstawie twierdzenia 2.5.4 otrzymujemy funkcje testowe

$$F_r^o = \frac{V_r}{V_d},\quad F_a^o = \frac{V_a}{V_d},\quad F_c^o = \frac{V_c}{V_e},\quad F_{ac}^o = \frac{V_{ac}}{V_e}$$

gdzie

$$V_i = \frac{SS_i}{\nu_i} \qquad (i=r,a,d,c,ac,e)$$

jest średnim kwadratem dla i-tej pozycji tablicy analizy wariancji (por. tabl.2.5.1).

W tablicy 2.5.1 wielkości

$$\begin{cases} SS_r = ac\sum_{i=1}^{r}(\bar{y}_{i..} - \bar{y})^2, \quad SS_a = cr\sum_{j=1}^{a}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y})^2, \\ SS_d = c\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y})^2, \\ SS_c = ra\sum_{k=1}^{c}(\bar{y}_{..k} - \bar{y})^2, \quad SS_{ac} = r\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + \bar{y})^2 \\ SS_e = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(y_{ijk} - \bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{ij.} + \bar{y}_{.j.})^2, \\ SS_y = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(y_{ijk} - \bar{y})^2 \end{cases}$$

są sumami kwadratów odpowiednio dla replikacji, czynnika A, błędu d, czynnika C, interakcji AC, błędu e i wszystkich wyników y.

Tablica 2.5.1.

Analiza wariancji układu pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych

Źródło zmienności	Stopnie swobody ν	Suma kwadratów odchyleń SS	Średni kwadrat $V = \frac{SS}{\nu}$	Wartość oczekiwana średniego kwadratu $\mathcal{E}(V)$	Funkcja testowa F
1	2	3	4	5	6
1.Replikacje,R	r-1	$SS_r=\underline{y}'\underline{A}_r\underline{y}$	V_r	$ac\,\sigma_r^2+\sigma_d^2=ac\,\sigma_r^2+c\,\sigma_{ar}^2+\sigma_e^2$	$F_r=\frac{V_r}{V_d}$
2.Czynnik A	a-1	$SS_a=\underline{y}'\underline{A}_a\underline{y}$	V_a	$cr\,\sigma_a^2+\sigma_d^2=cr\,\sigma_a^2+c\,\sigma_{ar}^2+\sigma_e^2$	$F_a=\frac{V_a}{V_d}$
3.Błąd d interakcja AR	(r-1)(a-1)	$SS_d=\underline{y}'\underline{A}_d\underline{y}$	V_d	$\sigma_d^2=c\,\sigma_{ar}^2+\sigma_e^2$	—
4.Czynnik C	c-1	$SS_c=\underline{y}'\underline{A}_c\underline{y}$	V_c	$ar\,\sigma_c^2+\sigma_e^2$	$F_c=\frac{V_c}{V_e}$
5.Interakcja AC	(a-1)(c-1)	$SS_{ac}=\underline{y}'\underline{A}_{ac}\underline{y}$	V_{ac}	$r\,\sigma_{ac}^2+\sigma_e^2$	$F_{ac}=\frac{V_{ac}}{V_e}$
6.Błąd e	a(c-1)(r-1)	$SS_e=\underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}$	V_e	σ_e^2	—
7.Całość	n-1	$SS_y=\underline{y}'(\underline{I}\ \frac{1}{n}\ \underline{E})\underline{y}$	—	—	—

W zastosowaniach wyznaczamy je metodą M (por. Oktaba [42]).

W sumach kwadratów występują następujące średnie:

$\bar{y}$ - średnia ogólna, $\bar{y}_{i..}$ - średnia i-tej replikacji, $\bar{y}_{.j.}$ - średnia j-tego poziomu czynnika A, $\bar{y}_{..k}$ - średnia k-tego poziomu czynnika C, $\bar{y}_{ij.}$ - średnia j-tego poziomu czynnika A i-tej replikacji,itd.średnie wyznaczono sumując po brakujących wskaźnikach np.

$$\bar{y}_{ij.} = \frac{1}{c}\sum_k y_{ijk}, \quad \bar{y}_{i...} = \frac{1}{ac}\sum_j\sum_k y_{ijk}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}.$$

W kolumnie 5 znajdujemy wielkości:

$$\sigma_r^2 = \frac{\sum_i \varrho_i^2}{r-1}, \quad \sigma_a^2 = \frac{\sum_j \alpha_j^2}{a-1}, \quad \sigma_c^2 = \frac{\sum_k \gamma_k^2}{b-1},$$

$$\sigma_{ac}^2 = \frac{\sum_j\sum_k (\alpha\gamma)_{jk}^2}{(a-1)(c-1)}$$

Uwaga 1. W przypadku niejednorodności błędu e można odpowiadającą mu sumę kwadratów SS_e rozbić na dwa składniki ortogonalne: SS_{cr} i SS_{abr} o stopniach swobody równych $(c-1)(r-1)$ i $(a-1)(c-1)(r-1)$.

Uwaga 2. Inne modele układu pojedyno rozszczepionych jednostek eksperymentalnych ze skorelowanymi błędami d oraz skorelowanymi błędami e oraz losowymi efektami replikacji, losowymi lub stałymi efektami A i C, losowymi interakcjami AC są rozpatrywane przez Niedokosa [39] przy odpowiedniej zmianie oznaczeń.

3. Doświadczenia wieloletnie i wielokrotne

3.1. Wstęp

Przez doświadczenie wielokrotne rozumiemy doświadczenie wykonane w kilku miejscowościach lub latach, bądź w jednej miejscowości powtarzane kilkakrotnie według tego samego schematu.

Rozważymy doświadczenie wielokrotne powtarzane według czterech schematów opisanych w rozdziale drugim.

3.2. Wielokrotny układ kompletnej randomizacji

I. Rozważamy doświadczenie założone metodą kompletnej randomizacji dla a obiektów replikowanych k-krotnie w c miejscowościach. Łatwo dostrzegamy, że dane liczbowe z c doświadczeń stanowią podwójną klasyfikację krzyżową obiekty × miejscowości z tą samą liczbą k obserwacji w każdej podklasie. Zagadnienie polega na porównaniu a obiektów po wyeliminowaniu wpływu miejscowości.

Układowi temu odpowiada model matematyczny postaci

$$y_{ijp} = \mu_{ij} + e_{ijp} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + (\alpha\gamma)_{ij} + e_{ijp} \tag{3.2.1}$$

$$(i=1,2,\ldots,a; \quad j=1,2,\ldots,c; \quad p=1,2,\ldots,k)$$

gdzie y_{ijp} oznacza p-tą obserwację i-tego obiektu w j-tej miejscowości tj. p-tą obserwację w podklasie (i, j).

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + (\alpha\gamma)_{ij} \tag{3.2.2}$$

oznacza średnią podklasy (i, j), α_i - efekt i-tego obiektu,

γ_j - efekt j-tej miejscowości, $(\alpha\gamma)_{ij}$ - efekt interakcyjny podklasy (i,j), μ - średnią ogólną, e_{ijp} - błąd eksperymentalny odpowiadający y_{ijp}. Całkowitą liczbą obserwacji jest n=ack.

Poza stałymi $\mu, \alpha_i, \gamma_j, (\alpha\gamma)_{ij}$ w modelu występują zmienne losowe: y_{ij} oraz e_{ij}. Zakładamy, że

(3.2.3) $$y_{ijp} \text{ — } NN(\mu_{ij}, \sigma_e^2) \quad \text{lub że} \quad e_{ijp} \text{ — } NN(0, \sigma_e^2).$$

W symbolice macierzowej założenia te zapisujemy jako

(3.2.4) $$\underline{y} \text{ — } N(\underline{\mu}, \sigma_e^2 \underline{I}) \quad \text{lub} \quad \underline{e} \text{ — } N(\underline{0}, \sigma_e^2 \underline{I})$$

gdzie

(3.2.5) $$\underline{y}' = [y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{ack}], \quad \underline{e}' = [e_{111}, e_{112}, \ldots, e_{ack}]$$

są odpowiednio wektorami wierszowymi n=ack obserwacji i tyluż błędów eksperymentalnych.

Model (3.2.1) ma postać macierzową

(3.2.6) $$\underline{y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{e} = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4]\underline{\beta} + \underline{e}$$

gdzie macierz

(3.2.7) $$\underline{X} = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4]$$

i gdzie $\underline{\mu} = \underline{X}\underline{\beta}$, przy czym (por. Oktaba [53])

(3.2.8) $$\begin{cases} \underline{E}_n = \underline{X}_1, \ \underline{X}_a = \underline{X}_2 = \underline{I}_a \otimes \underline{E}_{ck} = \underline{I}_a \otimes \underline{E}_c \otimes \underline{E}_k, \\ \underline{X}_c = \underline{X}_3 = \underline{E}_a \otimes \underline{I}_c \otimes \underline{E}_k \\ \underline{X}_{ac} = \underline{X}_4 = \underline{I}_{ac} \otimes \underline{E}_k = \underline{I}_a \otimes \underline{I}_c \otimes \underline{E}_k \end{cases}$$

są kolejno wektorem jedynkowym, macierzą obiektów A, macierzą miejscowości C i macierzą interakcji AC.

II. Wykażemy słuszność następującej tożsamości dla podwójnej klasyfikacji krzyżowej z tą samą liczbą obserwacji w każdej podklasie:

(3.2.9) $$SS_y = SS_a + SS_c + SS_{ac} + SS_e$$

gdzie SS_y było zdefiniowane w (2.2.14), natomiast

(3.2.10) $$SS_a = \underline{y}'\underline{A}_a\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_a - \underline{P}_1\right]\underline{y}$$

(3.2.11) $$SS_c = \underline{y}'\underline{A}_c\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_c - \underline{P}_1\right]\underline{y}$$

(3.2.12) $$SS_{ac} = \underline{y}'\underline{A}_{ac}\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_{ac} - \underline{P}_a - \underline{P}_c + \underline{P}_1\right]\underline{y}$$

(3.2.13) $$SS_e = \underline{y}'\underline{A}_e\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{I} - \underline{P}_{ac}\right]\underline{y}$$

gdzie $\underline{A}_a$, $\underline{A}_c$, $\underline{A}_{ac}$ i $\underline{A}_e$ są macierzami kolejnych form kwadratowych (3.2.10) ÷ (3.2.13). Formy te są odpowiednio sumami kwadratów dla 1) obiektów, 2) miejscowości, 3) interakcji obiektów z miejscowościami i 4) błędu eksperymentalnego.

Dowód tożsamości (3.2.9) jest natychmiastowy i wynika wprost z podstawienia wyrażeń (3.2.10) ÷ (3.2.13) do (3.2.9) oraz wykorzystaniu relacji (2.2.14).

Postaci sum kwadratów w formie niemacierzowej są podane w (3.2.16).

III. Twierdzenie 3.2.1. Przy założeniu (3.2.4) formy kwadratowe

(3.2.14) $$\frac{SS_a}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_a\underline{y}}{\sigma_e^2}, \quad \frac{SS_c}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_c\underline{y}}{\sigma_e^2}, \quad \frac{SS_{ac}}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_{ac}\underline{y}}{\sigma_e^2},$$
$$\frac{SS_e}{\sigma_e^2} = \frac{\underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}}{\sigma_e^2}$$

mają rozkłady chi-kwadrat odpowiednio

1) z $\nu_a = r(\underline{A}_a) = a-1$ przy hipotezie $\alpha_i=0$ $(i=1,\dots,a)$,

2) z $\nu_c = r(\underline{A}_c) = c-1$ przy hipotezie $\gamma_j=0$ $(j=1,\dots,c)$,

3) z $\nu_{ac} = r(\underline{A}_{ac}) = (a-1)(c-1)$ przy hipotezie $(\alpha\gamma)_{ij} = 0$,

4) z $\nu_e = n-ac$ stopniami swobody.

Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 2.2.2. Wykazuje się, że macierze $\underline{A}_a$, $\underline{A}_c$, $\underline{A}_{ac}$ i $\underline{A}_e$ są idempotentne i że ich rzędami są odpowiednio: $a-1$, $c-1$, $(a-1)(c-1)$ oraz $n-ac$.

Warto zauważyć, że

$$\underline{X}_2'\underline{X}_2 = ck\underline{I}$$

IV. <u>Twierdzenie 3.2.2.</u> Gdy $\underline{y} \sim N(\underline{\mu}, \sigma^2 \underline{I})$, to sumy kwadratów SS_a, SS_c, SS_{ac} i SS_e są stochastycznie niezależne.

Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 2.2.1. Wobec dwu twierdzeń 3.2.1 i 3.2.2 możemy utworzyć funkcje testowe F dla weryfikacji hipotez wymienionych w twierdzeniu 3.2.1. Funkcje te przedstawiono w tablicy 3.2.1.

W tablicy 3.2.1 użyto następujących zapisów skrótowych:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sum_i \alpha_i^2}{a-1}, \quad \sigma_c^2 = \frac{\sum_j \gamma_j^2}{c-1}, \quad \sigma_{ac}^2 = \frac{\sum_i \sum_j (\alpha\gamma)_{ij}^2}{(a-1)(c-1)} \tag{3.2.15}$$

i

$$\begin{cases} SS_a = ck \sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i..} - \bar{y})^2, \quad SS_c = ak \sum_{j=1}^{c} (\bar{y}_{.j.} - \bar{y})^2, \\ SS_{ac} = k \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{c} (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y})^2, \\ SS_e = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{c} \sum_{p=1}^{k} (\bar{y}_{ijp} - \bar{y}_{ij.})^2 \end{cases} \tag{3.2.16}$$

Tablica 3.2.1

Analiza wariancji wielokrotnego układu kompletnej randomizacji

Źródło zmienności	Liczba stopni swobody ν	Suma kwadratów odchyleń SS	Średni kwadrat $V=SS/\nu$	Wartość oczekiwana średniego kwadratu $\mathcal{E}(V)$	Funkcja testowa F
1	2	3	4	5	6
1. Obiekty A	a-1	$SS_a=\underline{y}'\underline{A}_a\underline{y}$	V_a	$\sigma_e^2+ck\,\sigma_a^2$	$F_a=V_a/V_e$
2. Miejscowości C	c-1	$SS_c=\underline{y}'\underline{A}_c\underline{y}$	V_c	$\sigma_e^2+ak\,\sigma_c^2$	$F_c=V_c/V_e$
3. Interakcja AC	(a-1)(c-1)	$SS_{ac}=\underline{y}'\underline{A}_{ac}\underline{y}$	V_{ac}	$\sigma_e^2+k\,\sigma_{ac}^2$	$F_{ac}=V_{ac}/V_e$
4. Błąd eksper.	n-ac	$SS_e=\underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}$	V_e	σ_e^2	—
5. Całość	n-1	$SS_y=\underline{y}'\underline{A}_y\underline{y}$	—	—	—

gdzie

$$(3.2.17)\quad \begin{cases} \bar{y}_{i..} = \frac{1}{ck}\sum_{j=1}^{c}\sum_{p=1}^{k} y_{ijp}, & \bar{y}_{.j.} = \frac{1}{ak}\sum_{i=1}^{a}\sum_{p=1}^{k} y_{ijp}, \\ \bar{y}_{ij.} = \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k} y_{ijp}, & \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{c}\sum_{p=1}^{k} y_{ijp} \end{cases}$$

są odpowiednio średnimi i-tego obiektu, j-tej miejscowości, podklasy (i, j) oraz wszystkich obserwacji.

V. Wartości oczekiwane średnich kwadratów V_a, V_c, V_{ac} i V_e uzyskano ze wzoru (1.4.9) i zestawiono w piątej kolumnie tablicy 3.2.1.

Mamy bowiem

$$\mathcal{E}(SS_a) = tr(\underline{A}_a \sigma_e^2 \underline{I}) + (\underline{X}\underline{\beta})'\underline{A}_a(\underline{X}\underline{\beta}) = \sigma_e^2\left(\frac{1}{ck} - \frac{1}{n}\right)ack +$$

$$+ (\underline{X}\underline{\beta})'\underline{A}_a(\underline{X}\underline{\beta}) = (a-1)\sigma_e^2 + ck\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2$$

stąd

$$\mathcal{E}(V_a) = \mathcal{E}\frac{SS_a}{a-1} = \sigma_e^2 + ck\,\sigma_a^2$$

Podobnie

$$\mathcal{E}(SS_{ac}) = tr(\underline{A}_{ac}\sigma_e^2\underline{I}) + (\underline{X}\underline{\beta})'\underline{A}_{ac}(\underline{X}\underline{\beta}) =$$

$$= (a-1)(b-1)\sigma_e^2 + k\sum_i\sum_j(\alpha\gamma)_{ij}^2$$

3.3. Niezrównoważony układ wielokrotny kompletnej randomizacji

W przypadku gd, obiekty są replikowane różną liczbę razy w miejscowościach dane eksperymentalne stanowią niezrównoważoną klasyfikację krzyżową. Odpowiednią analizę wariancji można znaleźć u Mikosa [33].

3.4. Wielokrotne bloki kompletnie zrandomizowane

I. Rozważamy doświadczenie założone metodą bloków kompletnie zrandomizowanych dla a obiektów i c bloków w d miejscowościach. Dostrzegamy, że dane liczbowe d eksperymentów stanowią kombinację klasyfikacji krzyżowej z hierarchiczną, a mianowicie: $C(D) \times A$ tj. bloki C w miejscowościach D tworzą klasyfikację krzyżową z obiektami A (por. Oktaba [42]).

Zagadnienie polega na weryfikacji hipotezy o interakcji obiektów z miejscowościami oraz samych obiektów przy eliminacji efektów blokowych w miejscowościach i efektów miejscowości.

Układowi wielokrotnemu bloków kompletnie zrandomizowanych przypisujemy model matematyczny postaci:

(3.4.1) $$y_{ijp} = \mu_{ijp} + e_{ijp} = \mu + \alpha_i + \delta_p + (\alpha\delta)_{ip} + \gamma(\delta)_{j(p)} + e_{ijp}$$

$$(i=1,\ldots,a;\ p=1,\ldots,d;\ j=1,\ldots,c)$$

gdzie y_{ijp} oznacza obserwację i-tego obiektu w j-tym bloku p-tej miejscowości, μ - średnią ogólną populacji, α_i - efektem i-tego obiektu, δ_p - efektem p-tej miejscowości, $(\alpha\delta)_{ip}$ - efektem interakcyjnym i-tego obiektu z p-tą miejscowością, $\gamma(\delta)_{j(p)}$ - efektem j-tego bloku w p-tej miejscowości, e_{ijp} - błędem eksperymentalnym odpowiadającym y_{ijp}.

(3.4.2) $$\mu_{ijp} = \mu + \alpha_i + \delta_p + (\alpha\delta)_{ip} + \gamma(\delta)_{j(p)}$$

oznacza średnią i-tego obiektu z j-tego bloku w p-tej miejscowości. Całkowitą liczbą obserwacji jest $n=acd$.

W modelu (3.4.1) tylko y_{ijp} oraz e_{ijp} są zmiennymi losowymi. Pozostałe wielkości są stałe. Zakładamy, że

$$(3.4.3) \qquad y_{ijp} \sim NN(\mu_{ijp}, \sigma_e^2) \quad \text{lub} \quad e_{ijp} \sim NN(0, \sigma_e^2).$$

W notacji macierzowej zapisujemy te założenia jak (3.2.4) gdzie

$$(3.4.4) \qquad \underset{1n}{\underline{y}'} = \left[y_{111}, y_{211}, \ldots, y_{adc}\right], \quad e' = \left[e_{111}, e_{211}, \ldots, e_{adc}\right]$$

Model (3.4.1) uzyskuje postać macierzową

$$(3.4.5) \qquad \underline{y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{e} = \left[\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4 \vdots \underline{X}_5\right]\underline{\beta} + \underline{e}$$

gdzie macierz

$$(3.4.6) \qquad \underline{X} = \left[\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4 \vdots \underline{X}_5\right] = \left[\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_a \vdots \underline{X}_d \vdots \underline{X}_{ad} \vdots \underline{X}_{c(d)}\right]$$

i gdzie $\underline{X}\underline{\beta} = \underline{\mu} = \left[\mu_{111}, \mu_{211}, \ldots, \mu_{adc}\right]'$ jest wektorem średnich podklas w populacji. Macierze blokowe (por. Oktaba [45]) postaci

$$(3.4.7) \qquad \begin{cases} \underline{X}_1 = \underline{E}_{acd} = \underline{E}_n \\ \underline{X}_2 = \underline{X}_a = \underline{E}_d \otimes \underline{E}_c \otimes \underline{I}_a \\ \underline{X}_3 = \underline{X}_d = \underline{I}_d \otimes \underline{E}_c \otimes \underline{E}_a \\ \underline{X}_4 = \underline{X}_{ad} = \underline{I}_d \otimes \underline{E}_c \otimes \underline{I}_a \\ \underline{X}_5 = \underline{X}_{c(d)} = \underline{I}_d \otimes \underline{I}_c \otimes \underline{E}_a \end{cases}$$

są kolejno: wektorem jedynkowym, macierzą obiektów A, macierzą miejscowości D, macierzą interakcji AD i macierzą bloków w miejscowościach C(D).

Wymienionym czterem końcowym macierzom $\underline{X}_2$, $\underline{X}_3$, $\underline{X}_4$ i $\underline{X}_5$ odpowiadają źródła zmienności w analizie wariancji z następującymi liczbami stopni swobody: $\nu_2 = a-1$, $\nu_3 = d-1$, $\nu_4 = (a-1)(d-1)$, $\nu_5 = d(c-1)$. Liczbą tą dla błędu jest $\nu_e = d(a-1)(c-1)$.

II. Dla rozpatrywanego układu zachodzi następująca tożsamość

(3.4.8) $$SS_y = SS_a + SS_d + SS_{ad} + SS_{c(d)} + SS_e$$

gdzie SS_y było zdefiniowane w (2.2.14), natomiast

(3.4.9) $$SS_a = \underline{y}'\underline{A}_a\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_a - \underline{P}_1\right]\underline{y}$$

(3.4.10) $$SS_d = \underline{y}'\underline{A}_d\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_d - \underline{P}_1\right]\underline{y}$$

(3.4.11) $$SS_{ad} = \underline{y}'\underline{A}_{ad}\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_{ad} - \underline{P}_a - \underline{P}_d + \underline{P}_1\right]\underline{y}$$

(3.4.12) $$SS_{c(d)} = \underline{y}'\underline{A}_{c(d)}\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_{cd} - \underline{P}_d\right]\underline{y}$$

(3.4.13) $$SS_e = \underline{y}'\underline{A}_e\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{I} - \underline{P}_{da} - \underline{P}_{dc} + \underline{P}_d\right]\underline{y}$$

gdzie $\underline{A}_a$, $\underline{A}_d$, $\underline{A}_{ad}$, $\underline{A}_{c(d)}$ i $\underline{A}_e$ są macierzami kolejnych form kwadratowych (3.4.9) ÷ (3.4.13). Formy te są odpowiednio sumami kwadratów dla 1) obiektów, 2) miejscowości, 3) interakcji obiektów z miejscowościami, 4) bloków w miejscowościach i 5) błędu eksperymentalnego.

Dowód tożsamości (3.4.8) jest bezpośredni.

III. <u>Twierdzenie 3.4.1.</u> Przy założeniu (3.4.3) formy kwadratowe

(3.4.14) $$\frac{SS_a}{\sigma_e^2},\ \frac{SS_d}{\sigma_e^2},\ \frac{SS_{ad}}{\sigma_e^2},\ \frac{SS_{c(d)}}{\sigma_e^2},\ \frac{SS_e}{\sigma_e^2}$$

mają rozkłady chi-kwadrat odpowiednio z ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 i ν_e stopniami swobody.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.2.1.

IV. Twierdzenie 3.4.2. Gdy $\underline{y} \sim N(\underline{\mu}, \sigma_e^2 \underline{I})$, to sumy kwadratów SS_a, SS_d, SS_{ad}, $SS_{c(d)}$ i SS_e są stochastycznie niezależne.

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.2.2.

W tablicy 3.4.1 użyto skróconych zapisów:

$$(3.4.15)\quad \begin{cases} \sigma_a^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}, \quad \sigma_d^2 = \dfrac{\sum\limits_{p=1}^{d}\delta_p^2}{d-1}, \quad \sigma_{ad}^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{p=1}^{d}(\alpha\delta)_{ip}^2}{(a-1)(d-1)}, \\ \sigma_{c(d)}^2 = \dfrac{\sum\limits_{j}\sum\limits_{p}\gamma(\delta)_{j(p)}^2}{d(c-1)} \end{cases}$$

i

$$SS_a = cd\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..} - \bar{y})^2, \quad SS_d = ac\sum_{p=1}^{d}(\bar{y}_{..p}-\bar{y})^2,$$

$$(3.4.16)\quad \begin{cases} SS_{ad} = c\sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{p=1}^{d}(\bar{y}_{i.p}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{..p}+\bar{y})^2, \\ SS_{c(d)} = a\sum\limits_{j=1}^{c}\sum\limits_{p=1}^{d}(\bar{y}_{.jp}-\bar{y}_{..p})^2, \\ SS_e = \sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{j=1}^{c}\sum\limits_{p=1}^{d}(y_{ijp}-\bar{y}_{i.p}-\bar{y}_{.jp}+\bar{y}_{..p})^2 \end{cases}$$

gdzie

$$(3.4.17)\quad \begin{cases} \bar{y}_{i..} = \dfrac{1}{cd}\sum\limits_{j=1}^{c}\sum\limits_{p=1}^{d}y_{ijp}, \quad \bar{y}_{.j.} = \dfrac{1}{ad}\sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{p=1}^{d}y_{ijp}, \\ \bar{y}_{..p} = \dfrac{1}{ac}\sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{j=1}^{c}y_{ijp}, \quad \bar{y}_{i.p} = \dfrac{1}{c}\sum\limits_{j=1}^{c}y_{ijp}, \\ \bar{y}_{.jp} = \dfrac{1}{a}\sum\limits_{i=1}^{a}y_{ijp} \end{cases}$$

są odpowiednio średnimi i-tej klasy klasyfikacji A, j-tej klasy

Tablica 3.4.1

Analiza wariancji wielokrotnych bloków kompletnie zrandomizowanych

Źródło zmienności	Liczba stopni swobody ν	Suma kwadratów odchyleń SS	Średni kwadrat $V = \frac{SS}{\nu}$	Wartość oczekiwana średniego kwadratu $\mathcal{E}(V)$	Funkcja testowa F
1	2	3	4	5	6
1. Obiekty A	a-1	$SS_a = \underline{y}'\underline{A}_a\underline{y}$	V_a	$\sigma_e^2 + cd\,\sigma_a^2$	$F_a = \frac{V_a}{V_e}$
2. Miejscowości D	d-1	$SS_d = \underline{y}'\underline{A}_d\underline{y}$	V_d	$\sigma_e^2 + ac\,\sigma_d^2$	$F_d = \frac{V_d}{V_e}$
3. Interakcja AD	(a-1)(d-1)	$SS_{ad} = \underline{y}'\underline{A}_{ad}\underline{y}$	V_{ad}	$\sigma_e^2 + c\,\sigma_{ad}^2$	$F_{ad} = \frac{V_{ad}}{V_e}$
4. Bloki w miejsc. C(D)	d(c-1)	$SS_{c(d)} = \underline{y}'\underline{A}_{c(d)}\underline{y}$	$V_{c(d)}$	$\sigma_e^2 + a\,\sigma_{c(d)}^2$	$F_{c(d)} = \frac{V_{c(d)}}{V_e}$
5. Błąd reszta AC(B)	d(a-1)(c-1)	$SS_e = \underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}$	V_e	σ_e^2	—
6. Całość	n-1=acd-1	$SS_y = \underline{y}'\underline{A}_y\underline{y}$	—	—	—

klasyfikacji C, itd. Zauważmy, że suma kwadratów dla błędu SS_e jest sumą kwadratów dla błędu w d miejscowościach.

V. Wartości oczekiwane średnich kwadratów V_a, V_d, V_{ad}, $V_{c(d)}$ i V_e uzyskano ze wzoru (1.4.9) i zestawiono w piątej kolumnie tablicy 3.4.1.

3.5. Wielokrotne bloki kompletnie zrandomizowane z powtórzonymi obserwacjami

Rozważamy model bloków kompletnie zrandomizowanych powtórzonych w kilku miejscowościach przy tej samej liczbie k indywidualnych obserwacji. Mamy więc k obserwacji w każdej z acd podklas klasyfikacji C(D) × A przedstawionej w paragrafie 3.4. Odpowiada temu model matematyczny postaci:

$$y_{ijpt} = \mu_{ijp} + e_{ijpt} = \tag{3.5.1}$$

$$= \mu + \alpha_i + \delta_p + (\alpha\delta)_{ip} + \gamma(\delta)_{j(p)} + \delta\gamma(\alpha)_{pj(i)} + e_{ijpt}$$

$$(i=1,\ldots,a;\ p=1,\ldots,d;\ j=1,\ldots,c;\ t=1,\ldots,k;\ n=acdk)$$

Poza symbolami przedstawionymi w poprzednim paragrafie występują tu $\delta\gamma(\alpha)_{pj(i)}$ - efekt interakcji CD wewnątrz A i błąd e_{ijpt} związany z t-tą obserwacją i-tego obiektu j-tego bloku w p-tej miejscowości.

Model (3.5.1) uzyskuje postać macierzową

$$\underline{y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{e} = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4 \vdots \underline{X}_5 \vdots \underline{X}_6]\underline{\beta} + \underline{e} \tag{3.5.2}$$

gdzie macierz

$$(3.5.3)\quad \underline{X} = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4 \vdots \underline{X}_5 \vdots \underline{X}_6] = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_a \vdots \underline{X}_d \vdots \underline{X}_{ad} \vdots \underline{X}_{c(d)} \vdots \underline{X}_{ac(d)}]$$

i gdzie $\underline{\mu} = \underline{X}\,\underline{\beta}$. Macierze blokowe (por. Oktaba [45]) postaci

$$(3.5.4)\quad \begin{cases} \underline{X}_1 = \underline{E}_{kacd} = \underline{E}_n \\ \underline{X}_2 = \underline{X}_a \quad = \underline{E}_d \otimes \underline{E}_c \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{E}_k \\ \underline{X}_3 = \underline{X}_d \quad = \underline{I}_d \otimes \underline{E}_c \otimes \underline{E}_a \otimes \underline{E}_k \\ \underline{X}_4 = \underline{X}_{ad} \quad = \underline{I}_d \otimes \underline{E}_c \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{E}_k \\ \underline{X}_5 = \underline{X}_{c(d)} = \underline{I}_d \otimes \underline{I}_c \otimes \underline{E}_a \otimes \underline{E}_k \\ \underline{X}_6 = \underline{X}_{ac(d)} = \underline{I}_d \otimes \underline{I}_c \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{E}_k \end{cases}$$

są odpowiednio: wektorem jedynkowym, macierzą obiektów A, macierzą miejscowości D, macierzą interakcji AD, macierzą bloków w miejscowościach C(D) i macierzą interakcji AC w miejscowościach D.

Wymienionym pięciu końcowym macierzom $\underline{X}_2$, $\underline{X}_3$, $\underline{X}_4$, $\underline{X}_5$ i $\underline{X}_6$ odpowiadają źródła zmienności w analizie wariancji z następującymi liczbami stopni swobody: $\nu_2 = a-1$, $\nu_3 = d-1$, $\nu_4 = (a-1)(d-1)$, $\nu_5 = d(c-1)$ i $\nu_6 = d(a-1)(c-1)$. Liczbą tą dla błędu (wewnątrz podklas) jest $\nu_e = acd(k-1) = n-acd$ (por. Oktaba [42]).

Dalszy tok rozumowania przebiega jak w poprzednich paragrafach.

Przykład 3.5.1. W doświadczeniu z zakresu drobiarstwa obserwowano k potomków (kurcząt) w każdej z podklas klasyfikacji "fermy w latach razy płeć" tj. klasyfikacja C(D) × A, gdzie klasyfikacje C, D i A odpowiadają: fermom (obiekty), sezonom (odpowiednik miejscowości) i rodzajom płci.

Postaci sum kwadratów w analizie wariancji są następujące:

$$
(3.5.5)\quad \begin{cases}
SS_a = \underline{y}'\underline{A}_a\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_a - \underline{P}_1\right]\underline{y} \\
SS_d = \underline{y}'\underline{A}_d\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_d - \underline{P}_1\right]\underline{y} \\
SS_{ad} = \underline{y}'\underline{A}_{ad}\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_{ad} - \underline{P}_a - \underline{P}_d + \underline{P}_1\right]\underline{y} \\
SS_{c(d)} = \underline{y}'\underline{A}_{c(d)}\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_{cd} - \underline{P}_d\right]\underline{y} \\
SS_{ac(d)} = \underline{y}'\underline{A}_{ac(d)}\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{P}_{ac(d)} - \underline{P}_{ad} - \underline{P}_{cd} + \underline{P}_d\right]\underline{y} \\
SS_y = \underline{y}'\underline{A}_y\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{I} - \underline{P}_1\right]\underline{y} \\
SS_e = \underline{y}'\underline{A}_e\underline{y} = \underline{y}'\left[\underline{I} - \underline{P}_{ac(d)}\right]\underline{y}
\end{cases}
$$

Tworzymy je zgodnie z regułą ustalającą odpowiedniość między składnikami liczb stopni swobody a operatorami.

3.6. Układy dla roślin wieloletnich metodą bloków kompletnie zrandomizowanych

Analizę wariancji doświadczenia z roślinami wieloletnimi (por.Pearce [47]) metodą bloków kompletnie zrandomizowanych można uzyskać z analizy wariancji układu rozszczepionych jednostek eksperymentalnych. Mamy bowiem liczby stopni swobody (por. Oktaba [42]):

$$
(3.6.1)\quad \begin{cases}
\nu_r = r-1 & \text{dla replikacji R,} \\
\nu_a = a-1 & \text{dla lat A (czynnik pierwszego rzędu),} \\
\nu_{ar} = (a-1)(r-1) & \text{dla interakcji AR,} \\
\nu_b = b-1 & \text{dla obiektów B (czynnik drugiego rzędu),} \\
\nu_{ab} = (a-1)(b-1) & \text{dla interakcji AB,} \\
\nu_{br} = (r-1)(b-1) & \text{dla interakcji BR,} \\
\nu_{abr} = (a-1)(b-1)(r-1) & \text{dla interakcji ABR.}
\end{cases}
$$

Zauważmy, że na błąd w układzie pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych składają się dwa składniki ν_{br} i ν_{abr} tj.

$$\nu_e = \nu_{br} + \nu_{abr} = a(b-1)(r-1)$$

Uwaga. Dla roślin jednorocznych w doświadczeniach wieloletnich nie interesuje nas interakcja RB; wtedy RB łącznie z RAB tworzy błąd drugiego rzędu.

Mamy tu model matematyczny

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varrho_k + (\alpha\varrho)_{ik} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} \tag{3.6.2}$$

$$(i = 1,\ldots,a;\ j=1,\ldots,b;\ k=1,\ldots,r)$$

gdzie y_{ijk} oznacza k-tą obserwację i-tego roku (klasyfikacja A) dla j-tego obiektu (klasyfikacja B), μ - średnią ogólną populacji, α_i - efekt i-tego roku, ϱ_k - efekt k-tej replikacji, $(\alpha\varrho)_{ik}$ - efekt interakcyjny dla α_i oraz ϱ_k, β_j - efekt j-tego obiektu, $(\alpha\beta)_{ij}$ - efekt interakcyjny i-tego roku z j-tym obiektem, e_{ijk} - błąd odpowiadający obserwacji y_{ijk}.

3.7. Wielokrotny kwadrat łaciński

I. Rozważmy układ eksperymentalny z $n=kc^2$ jednostkami doświadczalnymi uzyskanymi z k-krotnego powtórzenia kwadratu łacińskiego o wymiarach $c \times c$ (por. Oktaba [42]) przy c=a obiektach, c=f wierszach oraz c=b kolumnach. Odpowiedni model matematyczny jest postaci

$$y_{mijr} = \mu + \theta_r + \gamma(\theta)_{jr} + \alpha(\theta)_{ir} + \delta_m + (\delta\theta)_{mr} + e_{mijr} \tag{3.7.1}$$

$$(r=1,\ldots,k;\ m=1,\ldots,a;\ i=1,\ldots,f;\ j=1,\ldots,b;\ a=f=b=c)$$

gdzie y_{mijr} oznacza obserwację m-tego obiektu występującego w i-tym wierszu, j-tej kolumnie r-tego kwadratu łacińskiego,

(3.7.2) $\quad \mathcal{E}(y_{mijr}) = \mu_{mijr} = \mu + \theta_r + \gamma(\theta)_{jr} + \alpha(\theta)_{ir} + \delta_m + (\delta\theta)_{mr}$

jest odpowiednią średnią w populacji, μ - średnią ogólną populacji, θ_r - efektem r-tego kwadratu łacińskiego, δ_m - efektem obiektu, $\alpha(\theta)_{ir}$ - efektem i-tego wiersza w r-tym kwadracie, $\gamma(\theta)_{jr}$ - efektem j-tej kolumny w r-tym kwadracie, $(\delta\theta)_{mr}$ - efektem interakcyjnym między m-tym obiektem i r-tym kwadratem, e_{mijr} - błędem eksperymentalnym związanym z y_{mijr}.

Poza stałymi $\mu_{mijr}, \mu, \theta_r, \gamma(\theta)_{jr}, \alpha(\theta)_{ir}, \delta_m, (\delta\theta)_{mr}$ w modelu występują zmienne losowe: y_{mijr} oraz e_{mijr}.

Zakładamy, że

(3.7.3) $\quad y_{mijr} — NN(\mu_{mijr}, \sigma_e^2)$ lub $e_{mijr} — NN(0, \sigma_e^2)$

W symbolice macierzowej założenie to odnotowujemy jako

(3.7.4) $\quad \underline{y} — N(\underline{\mu}, \sigma_e^2 \cdot \underline{I})$ lub $\underline{e} — N(\underline{0}, \sigma_e^2 \cdot \underline{I})$

gdzie $\underline{y}$ i $\underline{e}$ są odpowiednio wektorami kolumnowymi n obserwacji i n błędów eksperymentalnych, $\sigma_e^2 \cdot \underline{I}$ jest macierzą kowariancji wektora $\underline{y}$ lub wektora $\underline{e}$.

Model (3.7.1) w notacji macierzowej ma postać

(3.7.5) $$\underline{y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{e} = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4 \vdots \underline{X}_5 \vdots \underline{X}_6]\underline{\beta} + e =$$
$$= \underline{X}_1\mu + \underline{X}_2\underline{\theta} + \underline{X}_3\underline{\gamma(\theta)} + \underline{X}_4\underline{\alpha(\theta)} + \underline{X}_5\underline{\delta} + \underline{X}_6(\underline{\delta\theta}) + \underline{e}$$

gdzie

(3.7.6) $$\underline{X} = [\underline{X}_1 \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \underline{X}_4 \vdots \underline{X}_5 \vdots \underline{X}_6]$$

jest macierzą układu określonego przez sześć następujących macierzy blokowych: $\underline{X}_1$ - dla średniej μ, $\underline{X}_2 = \underline{X}_k$ - dla kwadratów łacińskich, $X_3 = X_{b(k)}$ - dla kolumn wewnątrz kwadratów, $X_4 = X_{f(k)}$ - dla wierszy wewnątrz kwadratów, $\underline{X}_5 = \underline{X}_a$ - dla obiektów, $\underline{X}_6 = \underline{X}_{ak}$ - dla interakcji między obiektami i kwadratami łacińskimi:

$$(3.7.7)\qquad \begin{cases} \underline{X}_1=\underline{E}_n, \ \underline{X}_2=\underline{X}_k=\underline{I}_k\otimes\underline{E}_{c^2}, \ \underline{X}_3=\underline{X}_{b(k)}=\underline{I}_k\otimes\underline{I}_c\otimes\underline{E}_c, \\ \underline{X}_4=\underline{X}_{f(k)}=\underline{I}_k\otimes\underline{E}_c\otimes\underline{I}_c, \quad \underline{X}_5=\underline{X}_a, \quad \underline{X}_6=\underline{X}_{ak} \end{cases}$$

Wektor parametrów $\underline{\beta}$ obejmuje odpowiednie wektory parametrów dla μ, $\underline{\theta}$ - dla kwadratów łacińskich, $\underline{\gamma(\theta)}$ - dla kolumn wewnątrz kwadratów, $\underline{\alpha(\theta)}$ - dla wierszy wewnątrz kwadratów, $\underline{\delta}$ -dla obiektów, $(\underline{\delta\theta})$ - dla interakcji obiektów z kwadratami:

$$(3.7.8)\qquad \underline{\beta}' = [\mu, \underline{\theta}', \underline{\gamma(\theta)}', \underline{\alpha(\theta)}', \underline{\delta}', (\underline{\delta\theta})']$$

II. Dla wielokrotnego kwadratu łacińskiego ma miejsce następująca tożsamość (por. tablica ANOVA 3.7.1):

$$(3.7.9)\qquad SS_y = SS_k + SS_{b(k)} + SS_{f(k)} + SS_a + SS_{ak} + SS_e$$

gdzie suma kwadratów dla wszystkich wyników SS_y jest określona wzorem (2.2.14) a (por. Oktaba [44]):

$$(3.7.10)\qquad SS_k = \underline{y}'\underline{A}_k\underline{y} = \underline{y}'(\underline{P}_k - \underline{P}_1)\underline{y}$$

$$(3.7.11)\qquad SS_{b(k)} = \underline{y}'\underline{A}_{b(k)}\underline{y} = \underline{y}'(\underline{P}_{bk} - \underline{P}_k)\underline{y}$$

$$(3.7.12)\qquad SS_{f(k)} = \underline{y}'\underline{A}_{f(k)}\underline{y} = \underline{y}'(\underline{P}_{fk} - \underline{P}_k)\underline{y}$$

$$(3.7.13)\qquad SS_a = \underline{y}'\underline{A}_a\underline{y} = \underline{y}'(\underline{P}_a - \underline{P}_1)\underline{y}$$

$$(3.7.14)\qquad SS_{ak} = \underline{y}'\underline{A}_{ak}\underline{y} = \underline{y}'(\underline{P}_{ak} - \underline{P}_a - \underline{P}_k + \underline{P}_1)\underline{y}$$

$$(3.7.15) \quad SS_e = \underline{y}'\underline{A}_e\underline{y} = \underline{y}'(\underline{I} - \underline{P}_{ak} - \underline{P}_{bk} - \underline{P}_{fk} + 2\underline{P}_k)$$

są odpowiednio sumami kwadratów (por. tablica 3.7.1) dla kwadratów łacińskich, kolumn wewnątrz kwadratów, wierszy wewnątrz kwadratów, obiektów, interakcji obiektów z kwadratami i błędu eksperymentalnego.

Jak zwykle $\underline{P}_n = \underline{I}_n$ oraz

$$(3.7.16) \quad \underline{P}_i = \underline{X}_i(\underline{X}_i'\underline{X}_i)^{-1}\underline{X}_i' \qquad (i=1,k,bk,fk,a,ak)$$

Macierze form kwadratowych (3.7.10)÷(3.7.15) są postaci (por. Oktaba [44]):

$$(3.7.17) \quad \begin{aligned} &\underline{A}_k=\underline{P}_k-\underline{P}_1, \quad \underline{A}_{b(k)}=\underline{P}_{bk}-\underline{P}_k, \quad \underline{A}_{f(k)}=\underline{P}_{fk}-\underline{P}_k, \quad \underline{A}_a=\underline{P}_a-\underline{P}_1 \\ &\underline{A}_{ak}=\underline{P}_{ak}-\underline{P}_a-\underline{P}_k+\underline{P}_1, \quad \underline{A}_e=\underline{I}-\underline{P}_{ak}-\underline{P}_{bk}-\underline{P}_{fk}+2\underline{P}_k \end{aligned}$$

Wobec (2.2.14), (3.7.10) ÷ (3.7.15) dowód tożsamości (3.7.9) jest natychmiastowy.

Postaci sum kwadratów $SS_k, \ldots, SS_e$ w formie niemacierzowej podano niżej.

Dla losowo wybranych ugrupowań obiektów w kwadratach łacińskich macierze $\underline{X}_5$ i $\underline{X}_6$ mają określone postaci, różne dla różnych ugrupowań a macierze $\underline{X}_2, \underline{X}_3$ i $\underline{X}_4$ są niezmienne. Tym niemniej dla różnych losowych ugrupowań obiektów w kwadratach łacińskich zachodzą pewne proste relacje (por. (2.4.15)).

Dalej postępujemy analogicznie jak w 2.4 dla kwadratu łacińskiego. Dowodzi się niezależności stochastycznej sum kwadratów wchodzących do ANOVA (por. tablica 3.7.1) oraz tego, że sumy te podzielone przez σ^2 mają rozkłady chi-kwadrat z odpowiednimi liczbami stopni swobody. Stąd uzyskuje się postaci funkcji testowych F dla weryfikacji hipotez statystycznych dla obiektów, interakcji między obiektami i kwadratami łacińskimi.

Sumy kwadratów podane w tablicy 3.7.1 mają następujące postaci niemacierzowe:

$$
(3.7.18)\quad \begin{cases}
SS_k = c^2\sum_{r=1}^{k}(\bar{y}_{...r} - \bar{y})^2, \ SS_{b(k)} = c\sum_{j=1}^{c}\sum_{r=1}^{k}(\bar{y}_{.j.r}-\bar{y}_{...r})^2, \\
SS_{f(k)} = c\sum_{i=1}^{c}\sum_{r=1}^{k}(\bar{y}_{.i.r}-\bar{y}_{...r})^2, \ SS_a = kc\sum_{m=1}^{c}(\bar{y}_{m...}-\bar{y})^2, \\
SS_{ak} = \sum_{m=1}^{c}\sum_{r=1}^{k}(\bar{y}_{m..r}-\bar{y}_{m...}-\bar{y}_{...r}+\bar{y})^2, \\
SS_e = \sum_{(mijr)}^{n}(y_{mijr}-\bar{y}_{m..r}-\bar{y}_{..jr}-\bar{y}_{.i.r}+2\bar{y})^2, \\
SS_y = \sum_{(mijr)}^{n}(y_{mijr}-\bar{y})^2
\end{cases}
$$

gdzie $\bar{y}$ jest średnią ogólną a $\bar{y}$ ze wskaźnikami i kropkami oznaczają średnie po wskaźnikach, na których miejscu postawiono kropki; znak $\sum_{(mijr)}^{n}$ określa sumowanie po wszystkich n obserwacjach.

Nadto używamy następujących skrótowych oznaczeń:

$$
(3.7.19)\quad \begin{cases}
\sigma_k^2 = \dfrac{\sum_{r=1}^{k}\theta_r^2}{k-1}, \ \sigma_{b(k)}^2 = \dfrac{\sum_{j,r}\left[\gamma(\theta)_{jr}\right]^2}{k(b-1)}, \\
\sigma_{f(k)}^2 = \dfrac{\sum_{i,r}\left[\alpha(\theta)_{ir}\right]^2}{k(f-1)}, \ \sigma_a^2 = \dfrac{\sum_{m=1}^{a}\delta_m^2}{a-1}, \\
\sigma_{ak}^2 = \dfrac{\sum_{m,r}\left[(\delta\theta)_{mr}\right]^2}{(a-1)(k-1)}
\end{cases}
$$

Wartości oczekiwane średnich kwadratów V (por. kolumnę 4 tablicy 3.7.1) wyznaczono ze wzoru (1.4.9) i zestawiono w kolumnie 5. Funkcje testowe F wyznaczamy analogicznie jak w § 2.

3.8. Wielokrotny układ pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych

I. Rozważamy układ doświadczalny dla następującego modelu pojedyno rozszczepionych jednostek eksperymentalnych powtarzanych w kilku latach

$$(3.8.1)\qquad y_{ijks} = \mu + r_{i(s)} + \delta_s + \alpha_j + (\alpha\delta)_{js} + [\alpha r(\delta)]_{ij(s)} + \gamma_k + (\gamma\delta)_{ks} + (\alpha\gamma)_{jk} + (\alpha\gamma\delta)_{jks} + e_{ijk(s)}$$

$$i=1,\dots,r;\quad j=1,\dots,a;\quad k=1,\dots,c;\quad s=1,\dots,p$$

gdzie $r_{i(s)}$ jest losowym efektem i-tej replikacji w s-tym roku; δ_s - losowym efektem s-tego roku, α_j - stałym efektem j-tego poziomu klasyfikacji A (obiekty), $(\alpha\delta)_{js}$ - losowym efektem interakcyjnym między klasyfikacjami A i L (lata), $[\alpha r(\delta)]_{ij(s)}$ - losowym efektem interakcyjnym ("błędem") i-tej replikacji z j-tym poziomem klasyfikacji A w s-tym roku, γ_k - stałym efektem k-tego poziomu klasyfikacji C, $(\gamma\delta)_{ks}$ - losowym efektem interakcyjnym klasyfikacji C z latami, $(\alpha\gamma)_{jk}$ - stałym efektem interakcyjnym klasyfikacji A z C, $(\alpha\gamma\delta)_{jks}$ - losowym efektem interakcyjnym między trzema klasyfikacjami A, C i L, $e_{ijk(s)}$ - błędem eksperymentalnym w s-tym roku. Jak zwykle, μ oznacza średnią populacji, natomiast y_{ijks} - obserwację i-tej replikacji

Tablica 3.7.1

Analiza wariancji wielokrotnego kwadratu łacińskiego

Źródło zmienności	Liczba stopni swobody ν	Suma kwadratów odchyleń SS	Średni kwadrat $V = SS/\nu$	Wartość oczekiwana średniego kwadratu $\mathcal{E}(V)$
1	2	3	4	5
1. Między kwadratami łacińskimi, K	k-1	$SS_k = \underline{y}'\underline{A}_k\underline{y}$	V_k	$c^2\sigma_k^2 + \sigma_e^2$
2. Między kolumnami w kwadratach, B(K)	k(b-1)	$SS_{b(k)} = \underline{y}'\underline{A}_{b(k)}\underline{y}$	$V_{b(k)}$	$ck\sigma_{b\,k}^2 + \sigma_e^2$
3. Między wierszami w kwadratach, F(K)	k(f-1)	$SS_{f(k)} = \underline{y}'\underline{A}_{f(k)}\underline{y}$	$V_{f(k)}$	$c\sigma_{f\,k}^2 + \sigma_e^2$
4. Między obiektami, A	a-1	$SS_a = \underline{y}'\underline{A}_a\underline{y}$	V_a	$ck\sigma_a^2 + \sigma_e^2$
5. Interakcja, AK	(a-1)(k-1)	$SS_{ak} = \underline{y}'A_{ak}\underline{y}$	V_{ak}	$c\sigma_{ak}^2 + \sigma_e^2$
6. Reszta	$k(c^2-a-b-f+2)$	$SS_e = \underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}$	V_e	σ_e^2
7. Całość	n-1	$SS_y = \underline{y}'\underline{A}_y\underline{y}$	—	—

j-tego poziomu klasyfikacji A, k-tego poziomu klasyfikacji C w s-tym roku.

Przyjmujemy następujące założenia dla zmiennych losowych (por. Oktaba [42]):

$$(3.8.2)\quad \begin{cases} r_{i(s)} \sim N(0,\sigma^2_{r(p)}), \quad \delta_s \sim N(0,\sigma^2_p), \\ (\alpha\delta)_{js} \sim N(0, \frac{a-1}{a}\sigma^2_{ap}), \quad [\alpha r(\delta)]_{ij(s)} \sim N(0,\frac{a-1}{a}\sigma^2_{ar(p)}), \\ (\gamma\delta)_{ks} \sim N(0, \frac{c-1}{c}\sigma^2_{cp}), \quad (\alpha\gamma\delta)_{jks} \sim N(0,\frac{ac}{(a-1)(c-1)}\sigma^2_{acp}) \\ e_{ijk(s)} \sim N(0,\sigma^2_e) \end{cases}$$

Poza stałymi μ, α_j, γ_k oraz $(\alpha\gamma)_{jk}$ w modelu występują tylko efekty losowe. Nakładamy następujące restrykcje:

$$(3.8.3)\quad \begin{cases} \sum_j \alpha_j = \sum_k \gamma_k = \sum_j (\alpha\gamma)_{jk} = \sum_k (\alpha\gamma)_{jk} = 0 \\ \sum_j (\alpha\delta)_{js} = \sum_j [\alpha r(\delta)]_{ij(s)} = \sum_k (\gamma\delta)_{ks} = \sum_j (\alpha\gamma\delta)_{jks} = \\ = \sum_k (\alpha\gamma\delta)_{jks} = 0 \end{cases}$$

Zakładamy, że korelacje między efektami losowymi są równe zeru. Mamy

$$(3.8.4)\quad \mathcal{E} y_{ijks} = \mu + \alpha_j + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{jk} = \mu_{ijk}$$

W notacji macierzowej mieszany model (3.8.1) przybiera postać

$$(3.8.5)\quad \underline{y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{e} = \underline{E}_n\mu + \underline{X}_2\underline{r(\delta)} + \underline{X}_3\underline{\delta} + \underline{X}_4\underline{\alpha} + \underline{X}_5(\underline{\alpha\delta}) + \\ + \underline{X}_6\underline{\alpha r(\delta)} + \underline{X}_7\underline{\gamma} + \underline{X}_8(\underline{\gamma\delta}) + \underline{X}_9(\underline{\alpha\gamma}) + \\ + \underline{X}_{10}(\underline{\alpha\gamma\delta}) + \underline{e}$$

gdzie

(3.8.6) $\underline{X} = [\underline{E}_n \vdots \underline{X}_2 \vdots \underline{X}_3 \vdots \ldots \vdots \underline{X}_{10}]$

jest macierzą układu eksperymentalnego przy $\underline{X}_1 = \underline{E}_n$.

Wektorem efektów modelu jest

$$\underline{\beta}' = [\mu, \underline{r(\delta)}', \underline{\delta}', \underline{\alpha}', \underline{(\alpha\delta)}', [\underline{\alpha r(\delta)}]', \underline{\gamma}', \underline{(\gamma\delta)}', \underline{(\alpha\gamma)}', \underline{(\alpha\gamma\delta)}']$$

Przy n=rpac obserwacjach rozważany układ eksperymentalny stanowi kombinację klasyfikacji krzyżowej z hierarchiczną postaci $R(L) \times A \times C$ (co czytamy: "R w L razy A razy C") z następującym porządkiem klasyfikacji: C, A, L, R (por. Oktaba [45]).

Wobec tego macierze blokowe macierzy $\underline{X}$ (por. (3.8.5)) przybierają kształt (por. (1.4.19) i (1.4.20)):

$$(3.8.7) \quad \begin{cases} \underline{X}_2 = \underline{X}_{r(p)} = \underline{E}_c \otimes \underline{E}_a \otimes \underline{I}_p \otimes \underline{I}_r = \underline{E}_{ac} \otimes \underline{I}_{rp} \\ \underline{X}_3 = \underline{X}_p = \underline{E}_c \otimes \underline{E}_a \otimes \underline{I}_p \otimes \underline{E}_r = \underline{E}_{ac} \otimes \underline{I}_p \otimes \underline{E}_r \\ \underline{X}_4 = \underline{X}_a = \underline{E}_c \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{E}_p \otimes \underline{E}_r = \underline{E}_c \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{E}_{rp} \\ \underline{X}_5 = \underline{X}_{ap} = \underline{E}_c \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{I}_p \otimes \underline{E}_r = \underline{E}_c \otimes \underline{I}_{ap} \otimes \underline{E}_r \\ \underline{X}_6 = \underline{X}_{ar(p)} = \underline{E}_c \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{I}_p \otimes \underline{I}_r = \underline{E}_c \otimes \underline{I}_{arp} \\ \underline{X}_7 = \underline{X}_c = \underline{I}_c \otimes \underline{E}_a \otimes \underline{E}_p \otimes \underline{E}_r = \underline{I}_c \otimes \underline{E}_{arp} \\ \underline{X}_8 = \underline{X}_{cp} = \underline{I}_c \otimes \underline{E}_a \otimes \underline{I}_p \otimes \underline{E}_r \\ \underline{X}_9 = \underline{X}_{ac} = \underline{I}_c \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{E}_p \otimes \underline{E}_r = \underline{I}_{ac} \otimes \underline{E}_{rp} \\ \underline{X}_{10} = \underline{X}_{acp} = \underline{I}_c \otimes \underline{I}_a \otimes \underline{I}_p \otimes \underline{E}_r = \underline{I}_{pac} \otimes \underline{E}_r \end{cases}$$

Zakładamy, że

(3.8.8) $\underline{y} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$

gdzie

(3.8.9) $\mu = \mathcal{E}(\underline{y}) = \underline{E}_n\mu + \underline{X}_4\underline{\alpha} + \underline{X}_7\underline{\gamma} + \underline{X}_9(\underline{\alpha\gamma})$

przy

$$(3.8.10)\quad \begin{cases} \underline{r(\delta)} \sim N(\underline{0}, \sigma^2_{r(p)}\,\underline{I}_{rp}), \quad \underline{\delta} \sim N(\underline{0}, \sigma^2_p\,\underline{I}_p), \\ \underline{\alpha\delta} \sim N[\underline{0}, \sigma^2_{ap}(\underline{I}_{ap} - \frac{1}{a}\,\underset{aa}{\underline{E}}\otimes I_p)], \\ \underline{\alpha r(\delta)} \sim N[\underline{0}, \sigma^2_{ar(p)}(\underline{I}_{arp} - \frac{1}{a}\,\underset{aa}{\underline{E}}\otimes \underline{I}_{rp})], \\ \underline{\gamma\delta} \sim N[\underline{0}, \sigma^2_{cp}(\underline{I}_{cp} - \frac{1}{c}\,\underset{cc}{\underline{E}}\otimes \underline{I}_p)], \\ \underline{\alpha\gamma\delta} \sim N[\underline{0}, \sigma^2_{acp}(\underline{I}_{acp} - \frac{1}{c}\underset{cc}{\underline{E}}\otimes\underline{I}_p - \frac{1}{a}\,\underline{I}_c\otimes\underset{aa}{\underline{E}}\otimes\underline{I}_p + \\ + \frac{1}{ac}\,\underset{ac\,ac}{\underline{E}}\otimes\underline{I}_{ap})], \quad \underline{e} \sim N(\underline{0}, \sigma^2_e\,\underline{I}_n) \end{cases}$$

Przyjmujemy brak korelacji między wektorami losowymi modelu tj. zakładamy, że odpowiednie macierze kowariancji $\not\Sigma$ są równe zeru:

$$(3.8.11)\quad \not\Sigma_{\underline{r},\delta} = \not\Sigma_{\underline{r},\underline{\alpha\delta}} = \ldots = \not\Sigma_{\underline{\alpha\gamma\delta},\underline{e}} = \underline{0}$$

II. Wyznaczmy macierz kowariancji $\not\Sigma$ wektora obserwacji $\underline{y}$ w zależności od $\underline{X}_i\underline{X}_i'$.

Operatory rzutowe $\underline{P}_i$ o wymiarach $n\times n$ określamy jako

(3.8.12) $\underline{P}_i = \underline{X}_i(\underline{X}_i'\underline{X}_i)^{-1}\underline{X}_i'$ (i=r(p),p,a,ap,ar(p),c,cp,ac,acp,e)

gdzie $\underline{X}_i$ zdefiniowano w (3.8.7).

Korzystając ze wzoru (1.4.4) zauważamy, że wyraźną postacią macierzy kowariancji $\not\Sigma$ wektora losowego $\underline{y}$ wobec braku korelacji między losowymi wektorami modelu (3.8.1) lub (3.8.5) jest

$$\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}\left(\underline{E}_n\mu + \underline{X}_2\underline{r}(\delta) + \ldots + \underline{X}_{10}(\alpha\gamma\delta) + \underline{e}\right) =$$

$$= \underline{X}_2\underline{\Sigma}_{\underline{r}(\delta)}\underline{X}_2' + \ldots + \underline{X}_{10}\underline{\Sigma}_{\alpha\gamma\delta}\underline{X}_{10}' + \underline{\Sigma}_{\underline{e}}$$

Wobec (3.8.10) otrzymujemy postać macierzy $\underline{\Sigma}$ w zależności od $\underline{X}_i$:

$$\begin{aligned}
\underline{\Sigma} = {} & \sigma^2_{r(p)}\underline{X}_2\underline{X}_2' + \sigma^2_p\underline{X}_3\underline{X}_3' + \sigma^2_{ap}\underline{X}_5\left(\underline{I}_{ap} - \tfrac{1}{a}\underline{E}_{aa} \otimes \underline{I}_p\right)\underline{X}_5' + \\
& + \sigma^2_{ar(p)}\underline{X}_6\left(\underline{I}_{arp} - \tfrac{1}{a}\underline{E}_{aa} \otimes \underline{I}_{rp}\right)\underline{X}_6' + \\
& + \sigma^2_{cp}\underline{X}_8\left(\underline{I}_{cp} - \tfrac{1}{c}\underline{E}_{cc} \otimes \underline{I}_p\right)\underline{X}_8' + \\
& + \sigma^2_{acp}\underline{X}_{10}\left(\underline{I}_{acp} - \tfrac{1}{c}\underline{E}_{cc} \otimes \underline{I}_{ap} - \tfrac{1}{a}\underline{I}_c \otimes \underline{E}_{aa} \otimes \underline{I}_p + \right. \\
& \left. + \tfrac{1}{ac}\underline{E}_{ac\,ac} \otimes \underline{I}_p\right)\underline{X}_{10}' + \sigma^2_e\underline{I}_n
\end{aligned} \tag{3.8.13}$$

III. Analizę wariancji podaną w tablicy 3.8.1 można uzyskać z analizy wariancji poczwórnej klasyfikacji krzyżowej $R \times L \times A \times C$ przez połączenie źródeł zmienności R z RL (co daje R(L) tj. R wewnątrz L) oraz przez połączenie interakcji RA z RLA co daje AR(L) i wreszcie przez połączenie źródeł zmienności RC z RLC, RAC i RLAC, co daje błąd e. Pamiętamy, że zwykły model pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych odpowiada modelowi potrójnej klasyfikacji krzyżowej $R \times A \times B$ (R - replikacje, A i B - czynniki), w którym błąd "a" stanowi interakcja AR a błąd "b" - suma dwóch interakcji BR i ABR.

Analiza wariancji wyraża podział formy kwadratowej $\underline{y}'\underline{A}_{\underline{y}}\underline{y}$ dla wszystkich obserwacji na k (składników) form kwadratowych.

Każda z tych form stanowi sumę kwadratów SS_i dla odpowiednich źródeł zmienności.

Zachodzi przy tym następująca tożsamość (por. tablica 3.8.1 dla ANOVA)

$$SS_y = SS_{r(p)} + SS_p + SS_a + SS_{ap} + SS_{ar(p)} + \tag{3.8.14}$$

$$+ SS_c + SS_{cp} + SS_{ac} + SS_{acp} + SS_e = \sum_i^{10} SS_i$$

gdzie

$$SS_i = \underline{y}'\underline{A}_i\underline{y} \quad (i=y,r(p),p,a,ap,ar(p),c,cp,ac,acp,e) \tag{3.8.15}$$

Wyrażenia (3.8.14) wobec (3.8.15) są sumami kwadratów kolejno dla: 1) wszystkich wyników y, 2) replikacji wewnątrz lat, R(L), 3) lat L, 4) czynnika stałego A, 5) interakcji AL, 6) interakcji AR wewnątrz lat, AR(L), 7) czynnika stałego C, 8) interakcji CL, 9) interakcji stałej AC, 10) interakcji ACL i 11) błędu e.

Zgodnie z regułą tworzenia macierzy $\underline{A}_i$ na podstawie formuł na liczby stopni swobody w ANOVA (por. Oktaba [44]) uzyskujemy pozycje podane w kolumnach 1,2 i 3 tablicy 3.8.1, gdzie

$$\left\{\begin{array}{l}
\underline{A}_{r(p)}=\underline{P}_{pr}-\underline{P}_p,\ \ \underline{A}_p=\underline{P}_p-\underline{P}_1,\ \ \underline{A}_a=\underline{P}_a-\underline{P}_1,\ \ \underline{A}_{ap}=\underline{P}_{ap}-\underline{P}_a-\underline{P}_p+\underline{P}_1,\\
\underline{A}_{ar(p)}=\underline{P}_{par}-\underline{P}_{pa}-\underline{P}_{pr}+\underline{P}_p,\ \ \underline{A}_c=\underline{P}_c-\underline{P}_1,\ \ \underline{A}_{cp}=\underline{P}_{cp}-\underline{P}_c-\underline{P}_p+\underline{P}_1,\\
\underline{A}_{ac}=\underline{P}_{ac}-\underline{P}_a-\underline{P}_c+\underline{P}_1,\ \ \underline{A}_{acp}=\underline{P}_{pac}-\underline{P}_{ap}-\underline{P}_{cp}+\underline{P}_p-\underline{P}_{ac}+\underline{P}_a+\underline{P}_c-\underline{P}_1,\\
\underline{A}_e=\underline{P}_{prac}-\underline{P}_{pra}-\underline{P}_{pac}+\underline{P}_{pa},\ \ \underline{A}_y=\underline{I}-\underline{P}_1,\ \ \underline{P}_1=\frac{1}{n}\underline{E}_{nn},\\
\underline{I}=\underline{P}_n=\underline{P}_{prac}
\end{array}\right. \tag{3.8.16}$$

W ten sposób przedstawiliśmy sumy kwadratów (formy kwadratowe dla poszczególnych źródeł zmienności) przy użyciu operatorów

Tablica 3.8.1

Analiza wariancji wielokrotnego układu pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych

Źródło zmienności	Stopnie swobody $\nu = \text{tr}\ \underline{A}$	Suma kwadratów odchyleń $SS = \underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}$	Średni kwadrat $V = \frac{SS}{\nu}$	Wartość oczekiwana średniego kwadratu $\mathcal{E}(V)$
1	2	3	4	5
1. R(L)	$p(r-1)$	$SS_{r(p)} = \underline{y}'\underline{A}_{r\ p}\underline{y}$	$V_{r(p)}$	$\sigma_e^2 + ac\,\sigma_{r(p)}^2$
2. L	$p-1$	$SS_p = \underline{y}'\underline{A}_p\underline{y}$	V_p	$\sigma_e^2 + rac\,\sigma_p^2 + ac\,\sigma_{r(p)}^2$
3. A (stałe)	$a-1$	$SS_a = \underline{y}'\underline{A}_a\underline{y}$	V_a	$\sigma_e^2 + rcp\,\sigma_a^2 + rc\,\sigma_{ap}^2 + c\,\sigma_{ar(p)}^2$
4. AL	$(a-1)(p-1)$	$SS_{ap} = \underline{y}'\underline{A}_{ap}\underline{y}$	V_{ap}	$\sigma_e^2 + rc\,\sigma_{ap}^2 + c\,\sigma_{ar(p)}^2$
5. AR(L)	$p(a-1)(r-1)$	$SS_{ar(p)} = \underline{y}'\underline{A}_{ar\ p}\underline{y}$	$V_{ar(p}$	$\sigma_e^2 + c\,\sigma_{ar(p)}^2$
6. C (stałe)	$c-1$	$SS_c = \underline{y}'\underline{A}_c\underline{y}$	V_c	$\sigma_e^2 + rap\,\sigma_c^2 + ra\,\sigma_{cp}^2$
7. CL	$(c-1)(p-1)$	$SS_{cp} = \underline{y}'\underline{A}_{cp}\underline{y}$	V_{cp}	$\sigma_e^2 + ra\,\sigma_{cp}^2$
8. AC (stałe)	$(a-1)(c-1)$	$SS_{ac} = \underline{y}'\underline{A}_{ac}\underline{y}$	V_{ac}	$\sigma_e^2 + rp\,\sigma_{ac}^2 + r\,\sigma_{acp}^2$
9. ACL	$(a-1)(c-1)(p-1)$	$SS_{acp} = \underline{y}'\underline{A}_{acp}\underline{y}$	V_{acp}	$\sigma_e^2 + r\,\sigma_{acp}^2$
10. Błąd e	$ap(c-1)(r-1)$	$SS_e = \underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}$	V_e	σ_e^2
Całość	$n-1=rpac-1$	$SS_y = \underline{y}'\underline{A}_y\underline{y}$	—	—

rzutowych.

Dowód tożsamości (3.8.14) ze względu na (3.8.16) jest bezpośredni.

IV. Twierdzenie 3.8.1. Macierze $\underline{A}_i$ $(i=r(p),p,a,ap,ar(p),c,cp,ac,acp,e)$ występujące w formach kwadratowych (3.8.15) są idempotentne i parami ortogonalne. Mamy więc udowodnić, że

$$\underline{A}_i\underline{A}_j = \underline{0} \quad (i,j=r(p),p,a,ap,\ldots,e;\ i\neq j) \tag{3.8.17}$$

oraz

$$\underline{A}_i^2 = \underline{A}_i \tag{3.8.18}$$

Dowód: 1) Wykażemy przykładowo, że $\underline{A}_p^2 = \underline{A}_p$. Wobec idempotentności operatorów $\underline{P}_i$ mamy $\underline{P}_i^2 = \underline{P}_i$. Stąd $\underline{P}_1^2 = \underline{P}_1$ i $\underline{P}_p^2 = \underline{P}_p$. Z uwagi na $\underline{A}_p = \underline{P}_p - \underline{P}_1$ uzyskujemy

$$\underline{A}_p^2 = (\underline{P}_p-\underline{P}_1)^2 = \underline{P}_p^2-\underline{P}_p\underline{P}_1-\underline{P}_1\underline{P}_p+\underline{P}_1^2 = \underline{P}_p-\underline{P}_p\underline{P}_1-\underline{P}_1\underline{P}_p+\underline{P}_1$$

Zauważmy, że $\underline{X}_p$ ma wymiary $n\times p$ oraz że $\underline{E}\,\underline{X}_p = \mathrm{car}\ \underset{np}{\underline{E}}$. Stąd $\underline{X}_p'\,\underline{E} = \mathrm{rac}\ \underset{pn}{\underline{E}}$.

Mamy $n=acrp$ i

$$\left\{\begin{aligned}
\underline{X}_2'\underline{X}_2 &= \underline{X}_{r(p)}'\underline{X}_{r(p)} = ac\ \underline{I}_{rp}\\
\underline{X}_3'\underline{X}_3 &= \underline{X}_p'\underline{X}_p = acr\ \underline{I}_p\\
\underline{X}_4'\underline{X}_4 &= \underline{X}_a'\underline{X}_a = crp\ \underline{I}_a\\
\underline{X}_5'\underline{X}_5 &= \underline{X}_{ap}'\underline{X}_{ap} = cr\ \underline{I}_{ap}\\
\underline{X}_6'\underline{X}_6 &= \underline{X}_{ar(p)}'\underline{X}_{ar(p)} = c\ \underline{I}_{arp}\\
\underline{X}_7'\underline{X}_7 &= \underline{X}_c'\underline{X}_c = arp\ \underline{I}_c\\
\underline{X}_8'\underline{X}_8 &= \underline{X}_{cp}'\underline{X}_{cp} = ar\ \underline{I}_{cp}
\end{aligned}\right. \tag{3.8.19}$$

$$\begin{cases} \underline{X}_9'\underline{X}_9 = \underline{X}_{ac}'\underline{X}_{ac} = rp\ \underline{I}_{ac} \\ \underline{X}_{10}'\underline{X}_{10} = \underline{X}_{acp}'\underline{X}_{acp} = r\ \underline{I}_{acp} \end{cases}$$

Korzystając z (3.8.19) uzyskujemy

$$\underline{P}_p\underline{P}_1 = \frac{1}{n}\underline{X}_p(\underline{X}_p'\underline{X}_p)^{-1}\underline{X}_p'\underline{E} = \frac{1}{n}\underline{X}_p\frac{1}{acr}\underline{I}_p\underline{X}_p'\underline{E} =$$

$$= \frac{1}{nacr}\underline{I}_p\underline{X}_p\ rac\ {}_{pn}\underline{E} = \frac{1}{n}\underline{X}_p\ {}_{pn}\underline{E} = \frac{1}{n}\underline{E} = \underline{P}_1 = \underline{P}_p\underline{P}_1$$

gdyż $\underline{X}_p\ {}_{pn}\underline{E} = \underline{E}$

Zatem wobec

$$\underline{A}_p^2 = \underline{P}_p - \underline{P}_1 - \underline{P}_1 + \underline{P}_1 = \underline{P}_p - \underline{P}_1 = \underline{A}_p$$

dowód idempotentności macierzy $\underline{A}_p$ jest zakończony. Podobnie dowodzimy idempotentności pozostałych macierzy $\underline{A}_i$.

Przejdźmy do dowodu, że macierze $\underline{A}_p$ są parami ortogonalne. Przykładowo udowonimy, że $\underline{A}_a\underline{A}_c = \underline{0}$. Będziemy korzystali z następujących relacji, które uzyskuje się używając własności iloczynów kroneckerowskich (por. 1.4) macierzy:

$$(3.8.20)\quad \begin{cases} \underline{X}_2\underline{X}_2' = \underline{X}_{r(p)}\underline{X}_{r(p)}' = {}_{ac}\underline{E}_{ac} \otimes \underline{I}_{rp} \\ \underline{X}_3\underline{X}_3' = \underline{X}_p\underline{X}_p' = {}_{ac}\underline{E}_{ac} \otimes \underline{I}_p \otimes {}_r\underline{E}_r \\ \underline{X}_4\underline{X}_4' = \underline{X}_a\underline{X}_a' = {}_c\underline{E}_c \otimes \underline{I}_a \otimes {}_{rp}\underline{E}_{rp} \\ \underline{X}_5\underline{X}_5' = \underline{X}_{ap}\underline{X}_{ap}' = {}_c\underline{E}_c \otimes \underline{I}_{ap} \otimes {}_r\underline{E}_r \\ \underline{X}_6\underline{X}_6' = \underline{X}_{ar(p)}\underline{X}_{ar(p)}' = {}_c\underline{E}_c \otimes \underline{I}_{arp} \\ \underline{X}_7\underline{X}_7' = \underline{X}_c\underline{X}_c' = \underline{I}_c \otimes {}_{arp}\underline{E}_{arp} \\ \underline{X}_8\underline{X}_8' = \underline{X}_{cp}\underline{X}_{cp}' = \underline{I}_c \otimes {}_a\underline{E}_a \otimes \underline{I}_p \otimes {}_r\underline{E}_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{X}_9\underline{X}_9' = \underline{X}_{ac}\underline{X}_{ac}' = \underline{I}_{ac} \otimes \underset{rp\,rp}{\underline{E}} \\ \underline{X}_{10}\underline{X}_{10}' = \underline{X}_{acp}\underline{X}_{acp}' = \underline{I}_{pac} \otimes \underset{r\,r}{\underline{E}} \end{cases}$$

Wobec (3.8.16) mamy

$$\underline{A}_a\underline{A}_c = (\underline{P}_a-\underline{P}_1)(\underline{P}_c-\underline{P}_1)=\underline{P}_a\underline{P}_c-\underline{P}_a\underline{P}_1-\underline{P}_1\underline{P}_c+\underline{P}_1^2 = \underline{P}_a\underline{P}_c-\underline{P}_a\underline{P}_1-\underline{P}_1\underline{P}_c+\underline{P}_1$$

Zauważmy, że

$$\underline{P}_a\underline{P}_1 = \underline{P}_1\underline{P}_c = \underline{P}_a\underline{P}_c = \underline{P}_1$$

Istotnie wobec (3.8.12), (3.8.20), (1.4.21) otrzymujemy

$$\underline{P}_a\underline{P}_c = \underline{X}_a(\underline{X}_a'\underline{X}_a)^{-1}\underline{X}_a'\underline{X}_c(\underline{X}_c'\underline{X}_c)^{-1}\underline{X}_c' = \underline{X}_a\underline{X}_a'\underline{X}_c\underline{X}_c'\frac{1}{crp}\cdot\frac{1}{rpa} =$$

$$= \frac{1}{ca(rp)^2}(\underset{c\,c}{\underline{E}} \otimes \underline{I}_a \otimes \underset{rp\,rp}{\underline{E}})(\underline{I}_c \otimes \underset{arp\,arp}{\underline{E}}) =$$

$$= \frac{1}{ca(rp)^2}\left[\underset{c\,c}{\underline{E}} \otimes (\underline{I}_a \otimes \underset{rp\,rp}{\underline{E}})(\underset{a\,a}{\underline{E}} \otimes \underset{rp\,rp}{\underline{E}})\right] =$$

$$= \frac{1}{carp}\left[\underset{c\,c}{\underline{E}} \otimes (\underset{a\,a}{\underline{E}} \otimes \underset{rp\,rp}{\underline{E}})\right] = \frac{1}{n}\underset{c\,c}{\underline{E}} \otimes \underset{arp\,arp}{\underline{E}} =$$

$$= \frac{1}{n}\underset{carp\,carp}{\underline{E}} = \frac{1}{n}\underline{\underline{E}} = \underline{P}_1$$

Zatem

$$\underline{A}_a\underline{A}_c = \underline{P}_1 - \underline{P}_1 - \underline{P}_1 + \underline{P}_1 = 0$$

a o dowód tego nam chodziło.

Wykażemy, że $\underline{A}_{r(p)}\,\underline{A}_p = \underline{0}$.

Istotnie

$$\underline{A}_{r(p)}\,\underline{A}_p = (\underline{P}_{pr} - \underline{P}_p)(\underline{P}_p - \underline{P}_1) =$$

$$= \underline{P}_{pr}\,\underline{P}_p - \underline{P}_{pr}\,\underline{P}_1 - \underline{P}_p\underline{P}_p + \underline{P}_p\underline{P}_1 =$$

$$= \underline{P}_p - \underline{P}_1 - \underline{P}_p + \underline{P}_1 = \underline{0}$$

gdyż $\underline{P}_{pr}\,\underline{P}_p = \underline{P}_p$. Mamy bowiem

$$\underline{P}_{pr}\ \underline{P}_{p} = \underline{X}_{pr}(\underline{X}'_{pr}\underline{X}_{pr})^{-1}\ \underline{X}'_{pr}\underline{X}_{p}(\underline{X}'_{p}\underline{X}_{p})^{-1}\ \underline{X}'_{p} =$$

$$= \frac{1}{acr\ ac}(\underline{X}_{pr}\underline{X}'_{pr})(\underline{X}_{p}\underline{X}'_{p}) = \frac{1}{acr\ ac}(\ {}_{ac}\underline{E}_{ac} \otimes \underline{I}_{rp})(\ {}_{ac}\underline{E}_{ac} \otimes \underline{I}_{p} \otimes {}_{r}\underline{E}_{r}) =$$

$$= \frac{1\ ac}{acr\ ac}(\ {}_{ac}\underline{E}_{ac} \otimes \underline{I}_{rp})(\underline{I}_{p} \otimes {}_{r}\underline{E}_{r}) = \frac{1}{acr}(\ {}_{ac}\underline{E}_{ac} \otimes (\underline{I}_{p} \otimes \underline{I}_{r})(\underline{I}_{p} \otimes {}_{r}\underline{E}_{r}))=$$

$$= \frac{1}{acr}(\ {}_{ac}\underline{E}_{ac} \otimes \underline{I}_{p} \otimes {}_{r}\underline{E}_{r}) = \underline{P}_{p}$$

$$\underline{P}_{p} = \frac{1}{acr}\underline{X}_{2}\underline{X}'_{2} = \frac{1}{acr}\underline{X}_{p}\underline{X}'_{p} = \frac{1}{acr}\ {}_{ac}\underline{E}_{ac} \otimes \underline{I}_{p} \otimes {}_{r}\underline{E}_{r}$$

Zatem $\quad \underline{A}_{r(p)}\ \underline{A}_{p} = 0$

W podobny sposób można wykazać ortogonalność pozostałych par macierzy $\underline{A}$.

Zakończyliśmy dowód idempotentności i ortogonalności macierzy $\underline{A}_{i}$.

V. Wyznaczymy obecnie macierz kowariancji $\underline{\Sigma}\!\!\!/$ wektora obserwacji $\underline{y}$ w postaci kombinacji liniowej operatorów $\underline{P}_{i}$ lub kombinacji liniowej macierzy $\underline{A}_{i}$ (i=r(p),p,ap,ar(p),cp,acp,n) i $\underline{P}_{1}$. Zrazu wyraźmy $\underline{X}_{i}\underline{X}'_{i}$ w zależności od operatorów $\underline{P}_{i}$.

Wobec

$$\underline{P}_{2} = \underline{X}_{2}(\underline{X}'_{2}\underline{X}_{2})^{-1}\ \underline{X}'_{2} = \frac{1}{ac}\underline{X}_{2}\underline{X}'_{2}$$

uzyskujemy

(3.8.21) $\qquad \underline{X}_{2}\underline{X}'_{2} = ac\ \underline{P}_{r(p)}$

Podobnie można otrzymać

(3.8.22) $\qquad \underline{X}_{3}\underline{X}'_{3} = acr\ \underline{P}_{p}$

Podstawiając (3.8.7), (3.8.21) i (3.8.22) do (3.8.13) i z uwagi na (3.8.27) mamy po dość długich przekształceniach

$$(3.8.23)\qquad \underline{\Sigma} = (ac\sigma^2_{r(p)} - c\sigma^2_{ar(p)})\underline{P}_{r(p)} + c\sigma^2_{ar(p)}\,\underline{P}_{ar(p)} + cr\sigma^2_{ap}\,\underline{P}_{ap} + ar\sigma^2_{cp}\,\underline{P}_{cp} + r\sigma^2_{acp}\,\underline{P}_{acp} + (acr\sigma^2_{p} - cr\sigma^2_{ap} - ar\sigma^2_{cp} - r\sigma^2_{acp})\underline{P}_{p} + \sigma^2_{e}\,\underline{I}_{n}$$

Obecnie, korzystając z (3.8.16) wyznaczamy operatory w funkcji macierzy $\underline{A}_i$ oraz $\underline{P}_1 = \frac{1}{n}\,\underline{E}_{nn}$:

$\underline{P}_p = \underline{A}_p + \underline{P}_1$, $\underline{P}_{pr} = \underline{A}_{r(p)} + \underline{A}_p + \underline{P}_1$, $\underline{P}_a = \underline{A}_a + \underline{P}_1$, $\underline{P}_{ap} = \underline{A}_{ap} + \underline{A}_a + \underline{A}_p + \underline{P}_1$,

$\underline{P}_{ar(p)} = \underline{A}_{ar(p)} + \underline{A}_{ap} + \underline{A}_a + \underline{A}_p + \underline{A}_{r(p)} + \underline{P}_1$, $\underline{P}_c = \underline{A}_c + \underline{P}_1$,

$\underline{P}_{cp} = \underline{A}_{cp} + \underline{A}_c + \underline{A}_p + \underline{P}_1$, $\underline{P}_{ac} = \underline{A}_{ac} + \underline{A}_a + \underline{A}_c + \underline{P}_1$,

$\underline{P}_{pac} = \underline{A}_{acp} + \underline{A}_{ap} + \underline{A}_p + \underline{A}_{cp} + \underline{A}_c + \underline{A}_{ac} + \underline{A}_a + \underline{P}_1$,

$\underline{P}_n = \underline{P}_{prac} = \underline{A}_e + \underline{A}_{ar(p)} + \underline{A}_{r(p)} + \underline{A}_{acp} + \underline{A}_{ap} + \underline{A}_p + \underline{A}_{cp} + \underline{A}_c + \underline{A}_{ac} + \underline{A}_a + \underline{P}_1$,

$\underline{A}_y = \underline{P}_n - \underline{P}_1$

$\underline{I}_n = \underline{A}_{r(p)} + \underline{A}_p + \underline{A}_a + \underline{A}_{ap} + \underline{A}_{ar(p)} + \underline{A}_c + \underline{A}_{cp} + \underline{A}_{ac} + \underline{A}_{acp} + \underline{A}_e + \underline{P}_1$

Stąd wobec (3.8.23) macierz $\underline{\Sigma}$ przybiera postać następującej kombinacji liniowej macierzy $\underline{P}_1$ i $\underline{A}_i$ form kwadratowych (sum kwadratów):

$$(3.8.24)\qquad \underline{\Sigma} = (ac\sigma^2_{r(p)} + acr\sigma^2_{p} + \sigma^2_{e})\underline{P}_1 + (ac\sigma^2_{r(p)} + \sigma^2_{e})\underline{A}_{r(p)} + (ac\sigma^2_{r(p)} + acr\sigma^2_{p} + \sigma^2_{e})\underline{A}_p + (cr\sigma^2_{ap} + \sigma^2_{ar(p)} + \sigma^2_{e})\underline{A}_a + (cr\sigma^2_{ap} + c\sigma^2_{ar(p)} + \sigma^2_{e})\underline{A}_{ap} + (c\sigma^2_{ar(p)} + \sigma^2_{e})\underline{A}_{ar(p)} + (ar\sigma^2_{cp} + \sigma^2_{e})\underline{A}_c + (ar\sigma^2_{cp} + \sigma^2_{e})\underline{A}_{cp} + (r\sigma^2_{acp} + \sigma^2_{e})\underline{A}_{ac} + (r\sigma^2_{acp} + \sigma^2_{e})\underline{A}_{acp} + \sigma^2_{e}\,\underline{A}_e = w_1\underline{P}_1 + w_{r(p)}\underline{A}_{r(p)} +$$

$$+w_p\underline{A}_p+w_a\underline{A}_a+w_{ap}\underline{A}_{ap}+w_{ar(p)}\underline{A}_{ar(p)}+w_c\underline{A}_c+w_{cp}\underline{A}_{cp}+$$

$$+w_{ac}\underline{A}_{ac}+w_{acp}\underline{A}_{acp}+w_e\underline{A}_e = \sum_{i=1}^{11} w_i\underline{A}_i$$

gdzie w_i $(i=1,r(p),p,a,ap,ar(p),c,cp,ac,acp,e)$ są współczynnikami przy macierzach $\underline{A}_i$.

Ponieważ wszystkie w_i są różne od zera $(\underline{P}_1=\underline{A}_1)$, więc macierz $\underline{\Sigma}$ jest pełnego rzędu i wobec tego

(3.8.25)
$$\underline{\Sigma}^{-1} = \sum_{i=1}^{11} \frac{1}{w_i}\underline{A}_i = \frac{1}{w_1}\underline{P}_1 + \frac{1}{w_{r(p)}}\underline{A}_{r(p)} + \frac{1}{w_p}\underline{A}_p +$$

$$+ \frac{1}{w_a}\underline{A}_a + \frac{1}{w_{ap}}\underline{A}_{ap} + \frac{1}{w_{ar(p)}}\underline{A}_{ar(p)} + \frac{1}{w_c}\underline{A}_c + \frac{1}{w_{cp}}\underline{A}_{cp} +$$

$$+ \frac{1}{w_{ac}}\underline{A}_{ac} + \frac{1}{w_{acp}}\underline{A}_{acp} + \frac{1}{w_e}\underline{A}_e$$

Zatem wektor obserwacji $\underline{y}$ ma rozkład dany w (3.8.8), gdzie $\underline{\mu}$ i $\underline{\Sigma}$ są określone odpowiednio wzorami (3.8.9) i (3.8.24). W ten sposób założenia rozważanego modelu (3.8.5) są już kompletnie i explicite przedstawione.

VI. Twierdzenie 3.8.2. Macierz kowariancji $\underline{\Sigma}$ oraz macierze $\underline{A}_{r(p)}$, $\underline{A}_p$, $\underline{A}_a$, $\underline{A}_{ap}$, $\underline{A}_{ar(p)}$, $\underline{A}_c$, $\underline{A}_{cp}$, $\underline{A}_{ac}$, $\underline{A}_{acp}$ i $\underline{A}_e$ spełniają następujące relacje

(3.8.26) $\underline{A}_i\underline{\Sigma} = w_i\underline{A}_i$ $(i=r(p),p,a,ap,ar(p),c,cp,ac,acp,e)$

gdzie w_i występują w (3.8.24).

Dowód przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 2.5.2.

Korzystając z (3.8.21) i (3.8.22) wyrazimy operatory rzutowe $P(\underline{E}_n)=\underline{P}_n, P[\underline{X}_i]=\underline{P}_i=\underline{X}_i(\underline{X}_i'\underline{X}_i)^{-1}\underline{X}_i'$ $(i=r(p),p,a,ap,ar(p),c,cp,ac,$

acp) jako iloczyny kroneckerowskie

$$(3.8.27)\quad \begin{cases} \underline{P}_1 = P(\underline{E}_n) = \frac{1}{n}\underline{E} \\ P[\underline{X}_{r(p)}] = \underline{P}_{r(p)} = \underline{X}_{r(p)}(\underline{X}'_{r(p)}\underline{X}_{r(p)})^{-1}\underline{X}'_{r(p)} = \\ \qquad = \frac{1}{ac}\underline{X}_{r(p)}\underline{X}'_{r(p)} = \frac{1}{ac}\,{}_{ac}\underline{E}_{ac}\otimes\underline{I}_{rp} \\ P[\underline{X}_p] = \underline{P}_p = \frac{1}{acr}\underline{X}_p\underline{X}'_p = \frac{1}{acr}\,{}_{ac}\underline{E}_{ac}\otimes\underline{I}_p\otimes{}_r\underline{E}_r \\ P[\underline{X}_a] = \underline{P}_a = \frac{1}{crp}\underline{X}_a\underline{X}'_a = \frac{1}{crp}\,{}_c\underline{E}_c\otimes\underline{I}_a\otimes{}_{rp}\underline{E}_{rp} \\ P[\underline{X}_{ap}] = \underline{P}_{ap} = \frac{1}{cr}\,{}_c\underline{E}_c\otimes\underline{I}_{ap}\otimes{}_r\underline{E}_r \\ P[\underline{X}_{ar(p)}] = \underline{P}_{ar(p)} = \frac{1}{c}\,{}_c\underline{E}_c\otimes\underline{I}_{arp} \\ P[\underline{X}_c] = \underline{P}_c = \frac{1}{arp}\underline{I}_c\otimes{}_{arp}\underline{E}_{arp} \\ P[\underline{X}_{cp}] = \underline{P}_{cp} = \frac{1}{ar}\underline{I}_c\otimes{}_a\underline{E}_a\otimes\underline{I}_p\otimes{}_r\underline{E}_r \\ P[\underline{X}_{ac}] = \underline{P}_{ac} = \frac{1}{pr}\underline{I}_{ac}\otimes{}_{rp}\underline{E}_{rp} \\ P[\underline{X}_{acp}] = \underline{P}_{acp} = \frac{1}{r}\underline{I}_{pac}\otimes{}_r\underline{E}_r \end{cases}$$

Twierdzenie 3.8.3. Jeżeli $\underline{y} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, gdzie $\underline{\Sigma}$ jest postaci (3.8.24), to formy kwadratowe

$$(3.8.28)\quad \frac{\underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}}{w_i} \quad (i=r(p),p,a,ap,ar(p),c,cp,ac,acp,e) \text{ oraz}$$

$\frac{\underline{y}'\underline{A}_e\underline{y}}{\sigma_e^2}$ mają stochastycznie niezależne rozkłady $\chi'^2(\nu_i, \lambda_i)$ odpowiednio z liczbami stopni swobody równymi $\nu_{r(p)} = p(r-1)$, $\nu_p = p-1$, $\nu_a = a-1$, $\nu_{ap} = (a-1)(p-1)$, $\nu_{ar(p)} = p(a-1)(r-1)$,

$\nu_c = c-1$, $\nu_{cp} = (c-1)(p-1)$, $\nu_{ac} = (a-1)(c-1)$, $\nu_{acp} = (a-1)(c-1)(p-1)$ (por. tablica (3.8.1)) i $\nu_e = ap(c-1)(r-1)$ i parametrami niecentralności: $\lambda_{r(p)} = \lambda_p = \lambda_{ap} = \lambda_{ar(p)} = \lambda_{cp} = \lambda_{acp} = \lambda_e = 0$,

$$\lambda_a = \frac{crp\sum_i \alpha_i^2}{2w_a} = \frac{crp(a-1)\sigma_a^2}{2w_a}, \lambda_c = \frac{arp\sum_j \gamma_j^2}{2w_c} = \frac{arp(c-1)\sigma_c^2}{2w_c},$$

$$\lambda_{ac} = \frac{rp\sum_{ij}(\alpha\gamma)_{ij}^2}{2w_{ac}} = \frac{rp(a-1)(c-1)\sigma_{ac}^2}{2w_{ac}}.$$

Dowód: Wykorzystujemy argumenty użyte w dowodzie twierdzenia 2.5.3.

Wobec (3.8.16), (3.8.27) i (1.4.8) wyznaczamy liczby stopni swobody analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 2.5.4. Szczegóły pomijamy.

Skorzystamy z twierdzenia 1.5.1. Wynika z niego, że wobec idempotentności macierzy $\frac{\underline{A}_i \underline{\Sigma}}{w_i}$ i $\underline{y} - N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, forma kwadratowa $\frac{\underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}}{w_i}$ ma niecentralny rozkład chi-kwadrat z parametrem niecentralności $\lambda_i = \frac{\underline{\mu}'\underline{A}_i\underline{\mu}}{2w_i}$.

Niezależność stochastyczną form kwadratowych (sum kwadratów) tj. niezależność stochastyczną chi-kwadratów wykazujemy jak w twierdzeniu 2.5.4.

<u>Twierdzenie 3.8.4.</u> Jeżeli $\underline{y} - N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, gdzie $\underline{\Sigma}$ ma postać (3.8.24), to wartości oczekiwane kolejnych form kwadratowych z ANOVA (por. tablica 3.8.1) są następujące

(3.8.29) $\quad \mathcal{E}(\underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}) = w_i\nu_i + 2w_i\lambda_i$

$(i=r(p),p,a,ap,ar(p),c,cp,ac,acp,e)$

gdzie współczynniki λ_i są parametrami niecentralności chi-kwadratów (por. twierdzenie 3.8.3).

Dowód: Skorzystajmy ze wzoru (1.4.9). Wobec (3.8.26) i tego, że $tr(\underline{A}_i) = \nu_i$ uzyskujemy

$$\mathcal{E}(\underline{y}'\underline{A}_i\underline{y}) = tr(\underline{A}_i \Sigma) + \mu'\underline{A}_i\mu = tr(w_i\underline{A}_i) + \mu'\underline{A}_i\mu =$$

$$= w_i tr(\underline{A}_i) + \mu'\underline{A}_i\mu = w_i \nu_i + \mu'\underline{A}_i\mu$$

Wobec (por. twierdzenie (3.8.3))

$$\lambda_i = \frac{\mu'\underline{A}_i\mu}{2w_i}$$

mamy $\mu'\underline{A}_i\mu = 2w_i\lambda_i$, a to dowodzi twierdzenia.

Przedstawione cztery twierdzenia niniejszego paragrafu pozwalają zająć się wyznaczeniem funkcji testowych F, dokładnych lub przybliżonych przy założeniu znajomości współczynników w_i oraz λ_i. Na parametry modelu są nałożone restrykcje.

Mając współczynniki niecentralności λ_i oraz współczynniki w_i tworzymy funkcje testowe F dla weryfikacji odpowiednich hipotez, wykorzystując twierdzenie 3.8.3, a w szczególności postaci wartości oczekiwanych, zależnych od w, które z kolei zależą od macierzy kowariancji Σ.

Oto zestawienie funkcji testowych:

1. $F_{(a-1)(p-1);p(a-1)(r-1)} = \frac{V_{ap}}{V_{ar(p)}}$ dla hipotezy $H: \sigma^2_{ap} = 0$

2. $F_{a-1;(a-1)(p-1)} = \frac{V_a}{V_{ap}}$ dla $H: \sigma^2_a = 0$

3. $F_{(c-1)(p-1);ap(c-1)(r-1)} = \frac{V_{cp}}{V_e}$ dla $H: \sigma^2_{cp} = 0$

4. $F_{c-1;(c-1)(p-1)} = \frac{V_c}{V_{cp}}$ dla $H: \sigma_c^2 = 0$

5. $F_{(a-1)(c-1);(a-1)(c-1)(p-1)} = \frac{V_{ac}}{V_{acp}}$ dla $H: \sigma_{ac}^2 = 0$

6. $F_{(a-1)(c-1)(p-1);ap(c-1)(r-1)} = \frac{V_{acp}}{V_e}$ dla $H: \sigma_{acp}^2 = 0$

Wszystkie funkcje testowe są dokładne.

Dalszym zagadnieniem jest przedstawienie estymatorów parametrów (por. Mikos [34]).

3.9. Doświadczenia wielokrotne metodą analizy wielu zmiennych

1. Doświadczenia wielokrotne bloków kompletnie zrandomizowanych z niejednorodnymi błędami.

W przypadku gdy wariancje dla błędów zmieniają się od doświadczenia do doświadczenia założonego metodą bloków kompletnie zrandomizowanych Caliński [6] rozpatruje odpowiedni model mieszany podwójnej klasyfikacji krzyżowej odmiany × miejscowości dla średnich po wszystkich blokach (powtórzeniach). Przedstawia przybliżone testy istotności F, wskazując na znaczenie pewnych mnożników ϵ_A, ϵ_B i ϵ_e przy zmniejszeniu liczb stopni swobody spowodowanym niejednorodnością błędów i korelacjami obserwacji y. W cytowanej pracy podano przykład liczbowy dla 21 doświadczeń.

Z punktu widzenia teoretycznego przybliżone testy istotności F oparto na metodzie Boxa [4], obejmującej szereg twierdzeń dla form kwadratowych z wielowymiarowymi zmiennymi o rozkładzie normalnym.

2. Zależnie od tego jak traktuje się wybór lat i miejscowości

można w doświadczeniach (np. odmianowych) wielokrotnych rozpatrywać model matematyczny stały lub mieszany.

W pracy Calińskiego i współautorów [5] rozpatruje się model mieszany analizy wariancji w przypadku danych zrównoważonych dla dwukierunkowej klasyfikacji krzyżowej $A \times B$, gdzie miejscowości (A), lata (B) oraz interakcję AB traktuje się jako losowe. Składowe wektorów (odmiany) traktuje się jako stałe. Model ten tj. model średnich obserwowanych plonów opracowano wykorzystując metodę analizy wariancji wielu zmiennych. Odmiany potraktowano jako zmienne przy podanych wyżej klasyfikacjach A i B. Wektory efektów głównych odmian w miejscowościach i latach oraz wektor ich interakcji i błędów są niezależnymi zmiennymi losowymi ze średnimi równymi zeru i pewnymi macierzami kowariancji. Hipotezy weryfikowano testami F i Λ Wilksa. Dla weryfikacji hipotezy odnośnie odmian zastosowano test T^2 Hotellinga. Przedstawiono również metodę jej weryfikacji dla poszczególnego przypadku nieistotności interakcji odmian z miejscowościami, bądź odmian z latami.

Wskazano jak wektor maksymalnego kontrastu między odmianami można wykorzystać do wartościowania poszczególnych odmian. Dla wszystkich kontrastów zbudowano test S i przedział ufności Scheffé'go. Opracowano odpowiednie programy na e.m.c. dla przedstawionej metody. W cytowanej pracy przedstawiono przykład liczbowy średnich plonów nasion w q/ha pięciu odmian łubinu żółtego z siedmiu miejscowości i siedmiu kolejnych lat.

Warto zauważyć, że skorzystano z metody składowych głównych do badania interakcji kontrastów odmian z miejscowościami lub z latami.

3. Analizę profilową wielu zmiennych można znaleźć w pracy Świetlickiej-Grali [66] - oraz Calińskiego i współautorów [7]. Ostatnia praca prezentuje metodę wielu zmiennych dla opracowania wyników doświadczeń z roślinami wieloletnimi i wielopokosowymi. Poza strukturą plonowania w podziale na pokosy i lata interesuje nas zmienność między porównywanymi obiektami jak i interakcja pokosów z latami. Należy zauważyć, że pokosy tych samych poletek są z reguły skorelowane przy czym korelacje różnych par pokosów są na ogół różne. Skorelowane są także pokosy z kolejnych lat. Z uwagi na występowanie tych korelacji nie można stosować analizy jednej zmiennej. Proponuje się zastosowanie analizy wielu zmiennych, przyjmując pokosy i lata jako zmienne. Taką analizę doświadczeń z powtarzanymi pomiarami, gdy nie stawia się założeń o braku korelacji lub o identycznej korelacji plonów z różnych pokosów uzyskanych z tych samych poletek nazywamy analizą profilową (por. Świetlicka-Grala [67] i Świetlicka-Grala i Domański [68] oraz Świetlicka-Grala i Grala [69]).

4. W pracy Calińskiego, Czajki i Kaczmarka [6] poza wymaganiami ortogonalności żąda się, aby liczba poziomów losowych w każdej z obu klasyfikacji (lat i miejscowości) była większa od liczby poziomów stałych odmian. Dla ominięcia tych ograniczeń Czajka [12] skonstruował model mieszany, w którym kierunki o poziomach losowych podlegają nieortogonalnej klasyfikacji hierarchicznej. Analizę dla tego modelu (gdy liczba odmian jest większa od liczby lat) przedstawiono, wykorzystując metodę wielozmiennej analizy wariancji modelu losowego z dwoma kierunkami klasyfikacji hierarchicznej (lata losowane oddzielnie dla poszczególnych

miejscowości), gdy poziomy trzeciego kierunku (odmiany) stanowią składowe zmiennej losowej wektorowej.

Przedstawiono testy F, Λ Wilksa i T^2 Hotellinga. Metodę postępowania zilustrowano przykładami, które obliczono na emc Odra-1204.

Literatura cytowana

[1] Aitken, A.C., On the statistical independence of quadratic forms in normal variates, Biometrika 37 (1950),pp.93-96.

[2] Banerjee, K.S., A note on idempotent matrices, Ann.Math. Statist. 35 (1964), pp. 880-2.

[3] Birkhoff, G. i S.Mclane, Przegląd algebry współczesnej, Warszawa, 1960.

[4] Box, G.E.P., Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems. I. Effect of inequality of variance in the one-way classification. Ann. Math. Statist. 25 (1954), pp. 290-302.

[5] Caliński, T., On the distribution of the F-type statistics in the analysis of a group of experiments, Journ.Roy. Stat. Soc. 28B (1966), pp. 526-542.

[6] Caliński, T., Czajka, S. i Kaczmarek, Z., Wielozmienna analiza wariancji w zastosowaniu do wyników serii doświadczeń, Listy Biometryczne Nr 42-45 (1974), str.9-41.

[7] Caliński, T., Świetlicka-Grala, J., Grala, B., Analiza doświadczeń z roślinami wieloletnimi i wielopokosowymi, Biuletyn Oceny Odmian, 1(6), (1975), pp.117-138.

[8] Chipman, J.S. i Rao, M.M., Projections, generalized inverses, and quadratic forms, J.Math. Anal. Appl. 9 (1964), pp. 1-11.

[9] Cochran, W.G., The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of variance, Proc.Camb.Phil.Soc. 30 (1934), pp. 178-91.

[10] Cochran, W.G. i Cox, G.M., Experimental designs, New York, 1957.

[11] Craig, A.T., Note on the independence of certain quadratic forms, Ann. Math. Statist. 14 (1943), pp. 195-7.

[12] Czajka, S., Analiza wyników serii doświadczeń nieortogonalnych, Czwarte Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, Poznań-Warszawa, 1974, str. 10-56.

[13] Elandt, R., O pewnych testach interakcji w doświadczeniach wieloletnich i wielokrotnych. Zagadnienia rejonizacji. Zastosowania Matematyki, 3 (1956).

[14] Federer, R., Experimental design, New York, 1955.

[15] Fisher, R.A., The design of experiments, Edinburgh-London, 1935.

[16] Fisz, M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, Warszawa, 1967.

[17] Good, I.J., On the independence of quadratic expressions, (With an Appendix by L.R.Welch) J.R.Statist.Soc. B 25 (1963), pp. 377-82. [Corrigenda 28, 584].

[18] Good, I.J., Conditions for a quadratic form to have a chi-squared distribution, Biometrika 56 (1969), pp.215-6. [Correction 57, 225].

[19] Graybill, F.A., An introduction to linear statistical models, I, New York, 1961.

[20] Graybill, F.A. i Marsaglia, G., Idempotent matrices and quadratic forms in the general linear hypothesis, Ann.Math.Statist. 28 (1957), pp. 678-686.

[21] Hall, G.G., The international encyclopedia of physical chemistry and chemical physics, I.

[22] Hotelling, H., On a matric theorem of A.T.Craig, Ann.Math. Stat. 15 (1944), pp. 427-429.

[23] James, A.T., The relationship algebra of an experimental design, Ann.Math.Statist. 28 (1957), pp. 993-1002.

[24] James, G.S., Notes on a theorem of Cochran, Proc.Camb. Phil.Soc. 48 (1952), pp. 443-6.

[25] Kempthorne, O., The design and analysis of experiments, New York, 1952, Chapters 5 and 6.

[26] Kendall, M.G. i Stuart, A., The advanced theory of statistics, London, 1966.

[27] Khatri, C.G., Further contributions to Wishartness and independence of second degree polynomials in normal vectors, J.Indian Statist.Ass. 1 (1963), pp. 61-70.

[28] Khatri, C.G., Some results for the singular normal multivariate regression models, Sankhya A 30 (1968), pp. 267-80.

[29] Lancaster, H.O., Traces and Cumulants of Quadratic Forme in Normal Variables, J.Roy. Statist. Soc. 16 B (1954), pp. 247-254.

[30] Loynes, R.M., On idempotent matrices, Ann.Math.Statist. 37 (1966), pp. 295-6.

[31] Madow, W.G., The distribution of quadratic forms in non-central normal random variables, Ann.Math.Statist. 11 (1940), pp. 100-103.

[32] Mann, H.B., Analysis and design of experiments, New York, 1949.

[33] Mikos, H., Operatory rzutowe w analizie wariancji, praca

doktorska w maszynopisie, Lublin, 1970.

[34] Mikos, H., Modele matematyczne rozszczepionych jednostek ze skorelowanymi błędami, IV Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii (1974), 57-78.

[35] Mitra, S.K., A new class of g-inverse of square matrices, Sankhya A 30 (1968), pp. 323-30.

[36] Nawrocki, Z., Zarys metodyki doświadczeń rolniczych, Warszawa, 1958.

[37] Nawrocki, Z., Teoria i praktyka doświadczenia rolniczego, Warszawa, 1967.

[38] Neyman, J., O metodach opracowywania doświadczeń wielokrotnych, RNRiL, 28, 1932.

[39] Niedokos, E., On mathematical models of split-plot design, Ann.Univ.M.Curie-Skłodowska, 18 A (1967), pp. 123-136.

[40] Ogasawara, T. i Takahashi, M., Independence of quadratic quantities in a normal system, J.Sc. Hiroshima Univ. A 15 (1951), pp. 1-9.

[41] Oktaba, W., Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa, Warszawa, 1966.

[42] Oktaba, W., Metody statystyki matematycznej w doświadczalnictwie, Warszawa, 1971.

[43] Oktaba, W., On the linear hypothesis in the theory of normal regression, Ann.Univ.M.Curie-Skłodowska 11 A (1957), pp. 17-71.

[44] Oktaba, W., Relacje macierzowe w analizie wariancji, Matematyka Stosowana 8, 1976, str. 81-88.

[45] Oktaba, W., Iloczyn kroneckerowski macierzy w analizie wariancji dla zrównoważonych modeli matematycznych, III Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, (1973), Warszawa, str. 6-44.

[46] Oktaba, W., Teoria układów eksperymentalnych. I. Modele stałe. I Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, PAN, (1970), str.1-109.

[47] Pearce, S.C., Field experimentation with fruit trees and other perennial plants, Maidstone 1953.

[48] Peterson, H.D., Statistical techniques in agricultural research, New York, 1939.

[49] Plackett, R.L., Regression analysis, Oxford, 1960.

[50] Przybysz, T., Pojedyncze i wielokrotne doświadczenia oparte na zasadzie rozszczepionych poletek. Część I. Analiza wariancji, Ann. Univ. M.Curie-Skłodowska 19 E (1964), str. 307-332.

[51] Rao, C.R., On the linear combination of observations and the general theory of least squares, Sankhya 7 (1946).

[52] Rao, C.R., Linear statistical inference and its applications, New York, 1965.

[53] Rao, C.R., A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, J.R.Statist.Soc. B 24 (1962), pp. 152-8.

[54] Rao, C.R., Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics, In Festschrift for J.Neyman: Research Papers in Statistics, ed. F.N. Dawid, pp. 263-79. London: Wiley, (1966).

[55] Rayner, A.A. i Livingstone, D., On the distribution of quadratic forms in singular normal variates, S.African J.Agric. Sci. 8 (1965), pp. 357-70.

[56] Roy, S.N., Some aspects of multivariate analysis, New York, 1957.

[57] Sakamoto, H., On the independence of two statistics, (Japanese), Res.Mem. Inst.Statist.Math. 1(9) (1944), pp. 1-25.

[58] Seber, G.A.F., The linear hypothesis: a general theory, London, 1966.

[59] Shanbhag, D.N., On the independence of quadratic forms, J.R.Statist.Soc. B 28 (1966), pp. 582-3.

[60] Shanbhag, D.N., Some remarks concerning Khatri's result on quadratic forms, Biometrika 55 (1968), pp. 593-5.

[61] Scheffé, H., The analysis of variance, New York, 1959.

[62] Searle, S.R., Topics in variance component estimation, Biometrics 27 (1971), pp. 1-77.

[63] Searle, S.R., Linear models, New York, 1970.

[64] Snedecor, W.G., Statistical methods, Ames, Iowa, 1957.

[65] Styan, G.P.H., Notes on the distribution of quadratic forms in singular normal variables, Biometrika 57 (1970), pp. 567-72.

[66] Świetlicka-Grala, J., Analiza profilowa, Polska Akademia Nauk, Materiały Kursu Szkoleniowego Polskiego Towarzystwa Biometrycznego i PAN, 4, Warszawa (1972).

[67] Świetlicka- rala, J., Praktyczne zastosowanie wielozmiennej analizy wariancji do doświadczeń z powtarzanymi

pomiarami. Praca doktorska. UAM Poznań (1971).

[68] Świetlicka-Grala, J. i Domański, J., Wielozmienna analiza wariancji pomiarów odczynu mięsa świń. Listy Biometryczne 29 (1971), 5-22.

[69] Świetlicka-Grala, J. i Grala, B., Zastosowanie analizy profilowej w doświadczeniach rolniczych. Listy Biometryczne 34-36 (1972).

[70] Takahashi, M., On analysis of variance for the split-plot designs, Journ.Sci.Hiroshima Univ., A (19) (1955), pp. 321-325.

[71] Taylor, J., The comparison of pairs treatments in split plot experiments, Biometrika, 37 (1950), pp. 443-444.

[72] Yates, F., Complex experiments, Journ.Roy.Stat.Soc., Suppl. 2 (1935), pp. 181-247.

[73] Yates, F., The principles of orthogonality and confounding in replicated experiments, Journ.Agr.Sci., 23 (1933), pp. 108-145.

[74] Yates, F. i Cochran, W.G., The analysis of groups of experiments, Journ.Agr.Sci., 28 (1938), pp. 556-580.